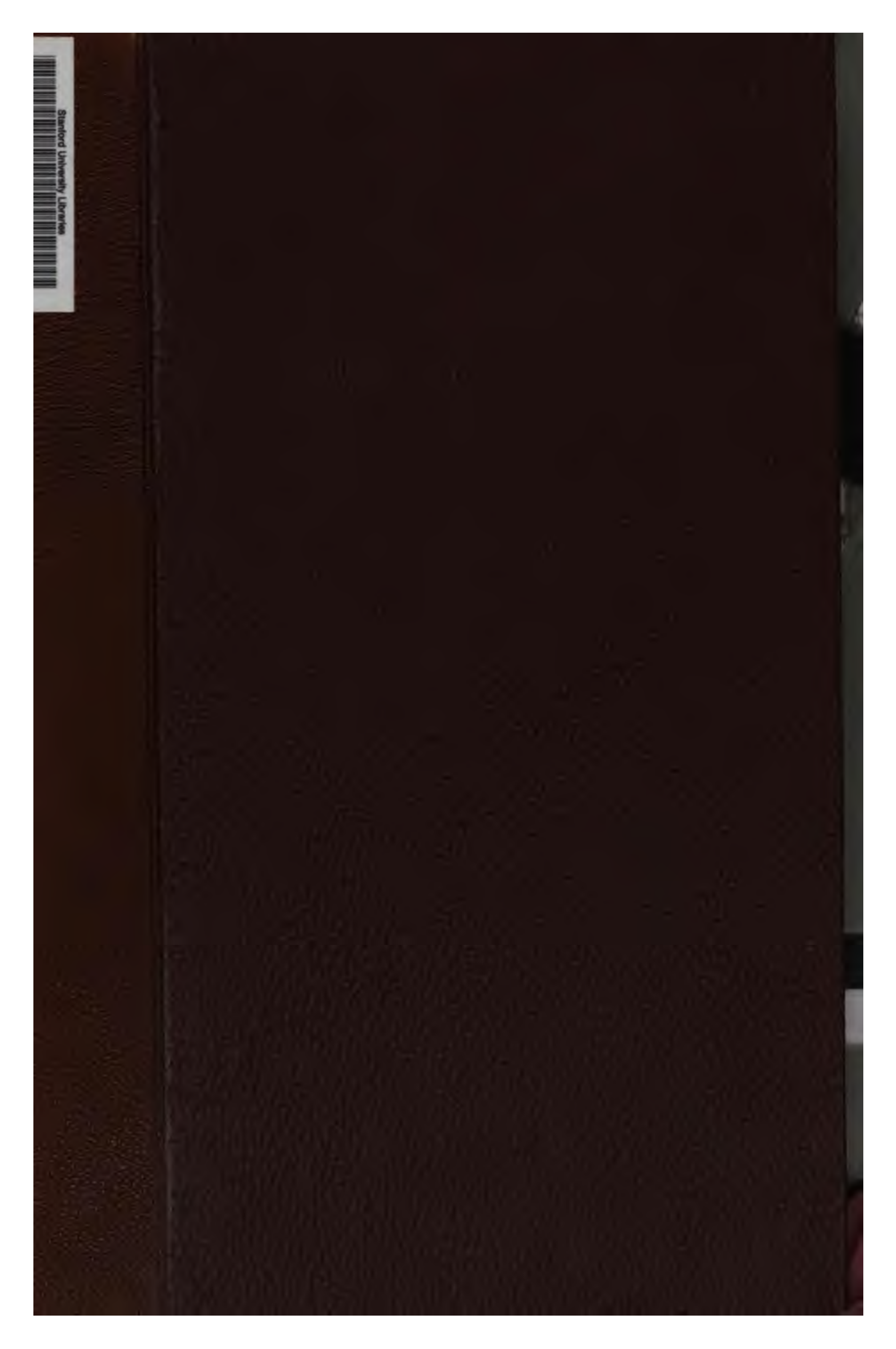
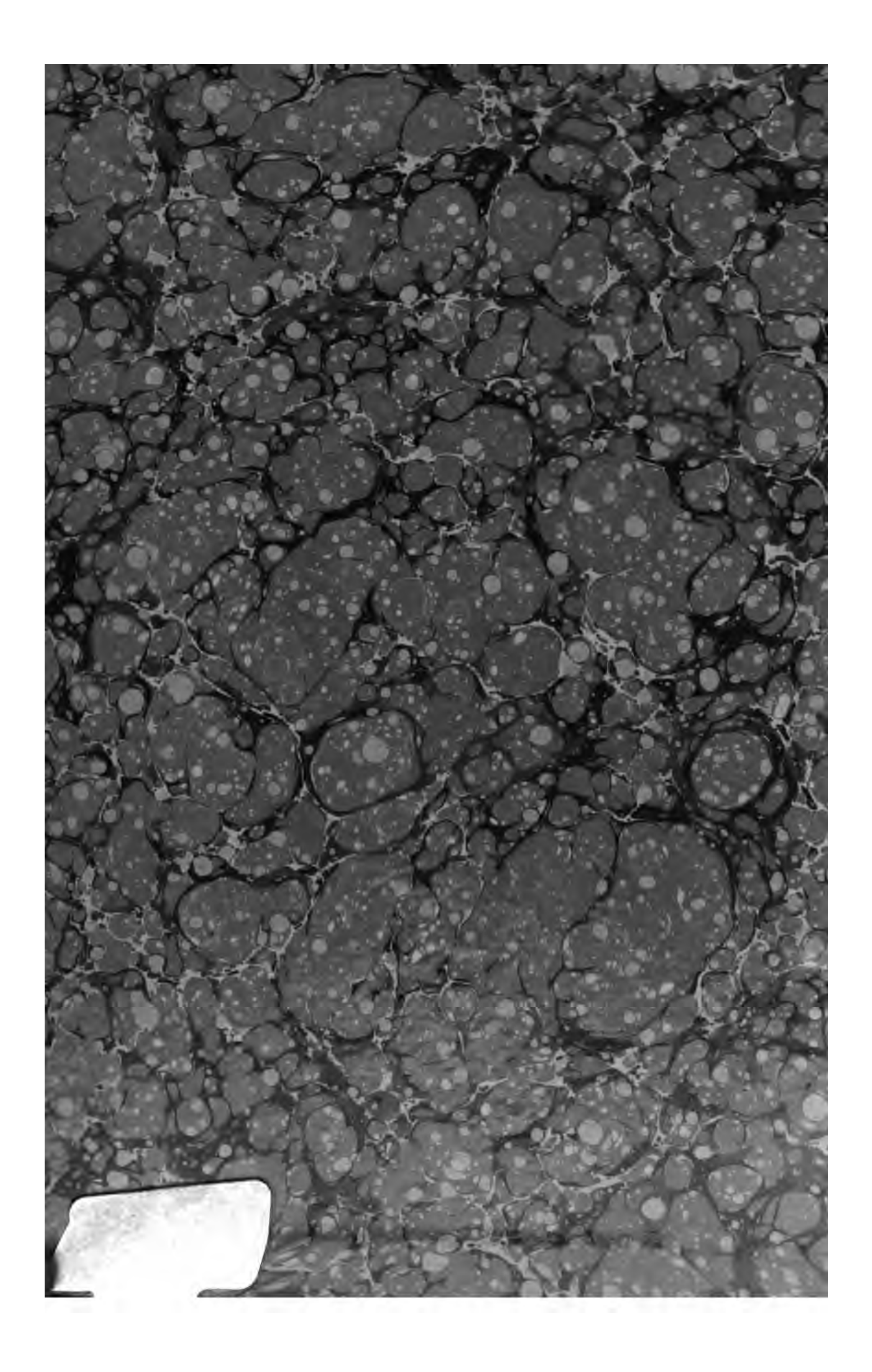
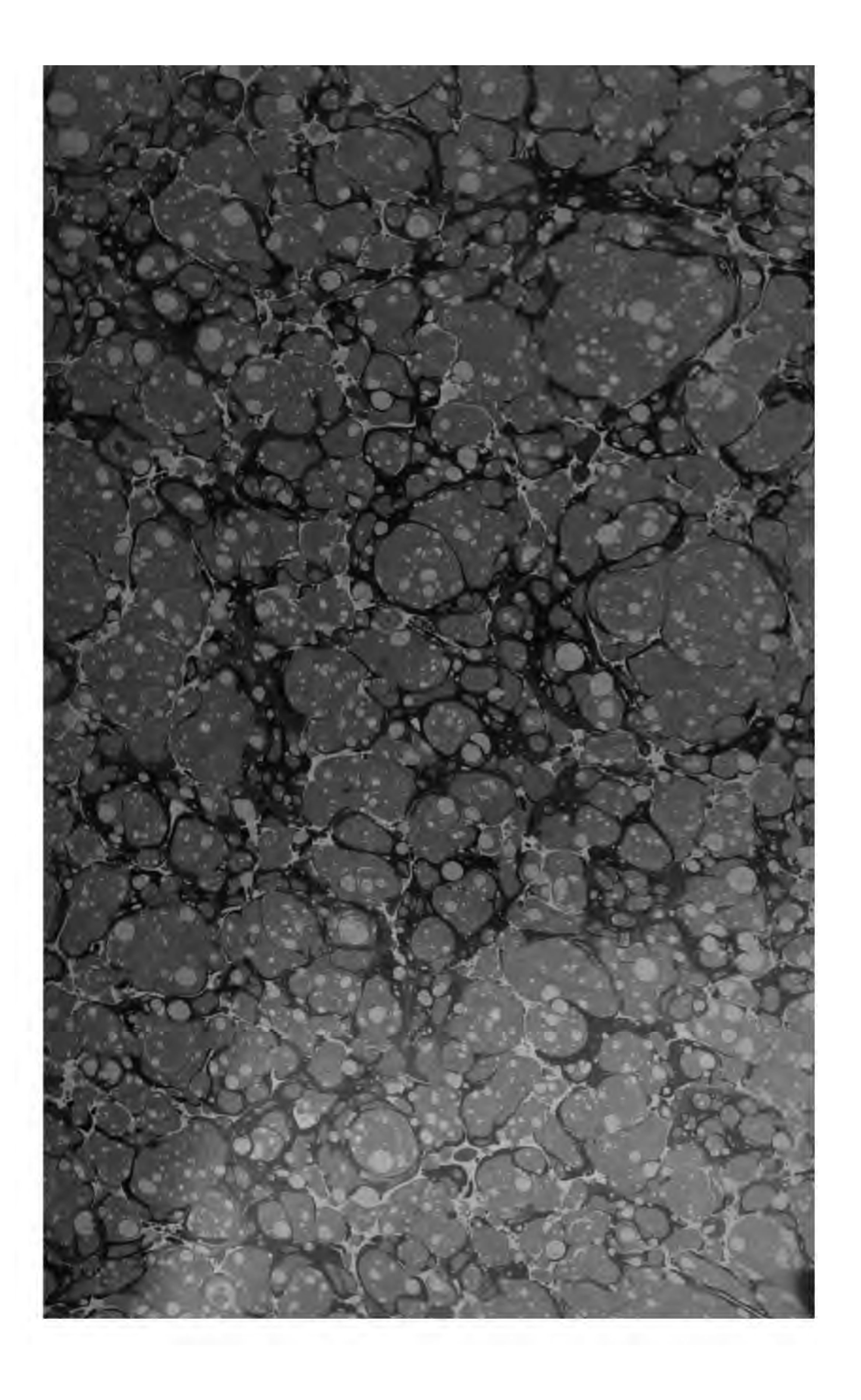
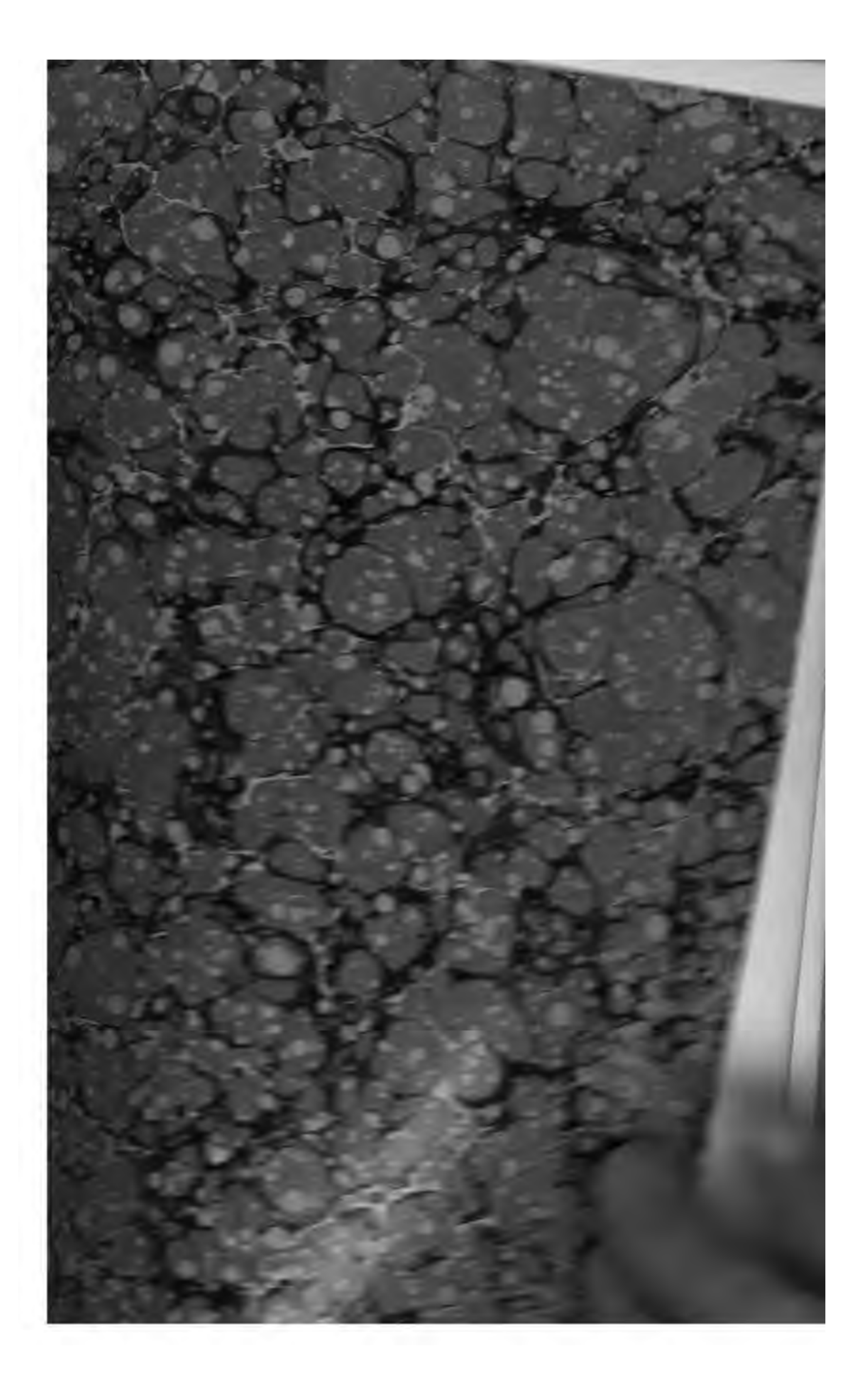

Stanford University Libraries









JAHRESBERICHT DER
DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG
DER ERGÄNZUNGSBÄNDE I. BAND

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER ELEMENTAR-GEOMETRIE IM XIX. JAHRHUNDERT

BERICHT
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

ERSTATTET VON

MAX SIMON
IN STRASSBURG I. E.

MIT 28 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906



JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG



DER ERGÄNZUNGSBÄNDE I. BAND

ENTHALTEND:

MAX SIMON, ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER ELEMENTARGEOMETRIE
IM XIX. JAHRHUNDERT



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER
ELEMENTAR-GEOMETRIE
IM XIX. JAHRHUNDERT

BERICHT

DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

ERSTATTET VON

MAX SIMON

IN STRASSBURG I. E.

MIT 28 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1906

Der vorliegende Bericht über Elementargeometrie war ursprünglich für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften bestimmt, und nur im Interesse der Sache hatte ich die Arbeit, deren Mühe ich voraussah, übernommen. Seit vier Jahren ist sie den Leitern der Encyklopädie übergeben, doch waren immer wieder Formalien zu erledigen, da die Eigenart des Referenten sich nicht mit der des Redakteurs deckte. Wenn schließlich Herr *Klein* das Referat in der vorliegenden Form ablehnte, so geschah es vorzugsweise, weil ihm keine Hilfskräfte zu Gebote standen, die sämtlichen Zitate mit bibliographischer Treue, und zwar jedesmal, wenn ein Werk genannt wurde, abfassen zu lassen. In der Tat war durch den Zustand der Zettel eine äußerst zeitraubende Korrektur nötig. Ich selbst habe nur die allerwichtigsten Werke bibliographisch genau zitiert, und die andern so, daß sie, mit verschwindenden Ausnahmen, jeder Interessent nach meinem Zitat sofort auffinden kann. Außerdem habe ich meistens die Zeitschriften nach ihren Begründern genannt, wofür ich umstehend eine Liste beilege.

Um die Arbeit weiteren Kreisen zugänglich zu machen, regte Herr *Klein* an, sie als einen besonderen Bericht in einem Ergänzungsbande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinen zu lassen, eine Anregung, die der Vorstand der Vereinigung willkommen hieß, und der ich gefolgt bin.

Zum größten Danke bin ich meinem Jugendfreund *E. Lampe* für die überaus mühevolle Korrektur verpflichtet, die er gelegentlich mit Zusätzen aus dem so reichen Schatz seiner Literaturkenntnis begleitete.

Straßburg i. E., August 1905.

M. Simon.

Journale.

Battaglini = Giornale di Matematiche, 1 von 1863.
Boncompagni = Bulletino di Bibliografia e di Storia 1868.
Bourget = Journal de mathématique élémentaire 1877 (*nicht* zu verwechseln mit dem gleichnamigen von *Vuibert*).
Clebsch = Mathematische Annalen.
Crelle = Journal für die reine u. angewandte Mathem. 1826.
Darboux = Bulletin des sciences mathématiques.
Eneström = Bibliotheca mathematica, von den Acta mathematica getrennt seit 1887.
Gergonne = Annales de mathématiques pures et appliquées 1810/11.
Grunert = Archiv der Mathematik u. Physik 1841.
Hachette = Correspondance sur l'école impériale Polytechnique. Bd. 1 von 1807 bis 1808.
Lampe = Jahrbuch über die Fortschritte der Math. 1871 (begründet von *Ohrtmann*).
Liouville = Journal de mathématiques pures et appliquées 1836.
Quetelet = Correspondance mathématique et physique par *Garnier* et *Quetelet* 1825, vom 3. Band *Quetelet* allein.
Schlömilch = Zeitschrift für Math. und Physik 1856 (histor.-litter. Abteilung bis ... *M. Cantor*).
Tortolini = Annali di Matematica pura ed applicata 1858.

Inhaltsübersicht.

I. Allgemeines.

II. Spezielles.

A. Parallelentheorie.

B. Kreis.

C. Flächeninhalt.

D. Dreiecke.

E. Polygone.

F. Allgemeine ebene Konfigurationen.

G. Allgemeine räumliche Beziehungen.

H. Besondere räumliche Beziehungen.

J. Trigonometrie.

I. Allgemeines.

1. Abgrenzung des Referats und allgemeine Gesichtspunkte. Die Abgrenzung des Stoffes ist schwierig, elementar ist alles oder nichts. Die ganze projektive Geometrie ist eine Erweiterung des Sinussatzes, die Integralrechnung entwickelte sich aus der Quadratur, ja selbst die Gruppentheorie kann man als eine Erweiterung der geometrischen Verwandtschaften auffassen. Man könnte die Elementargeometrie definieren als die Gesamtheit der Probleme, welche mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind; aber diese Definition würde gerade die wichtigsten Probleme, die Quadratur des Zirkels, die Volumenbestimmung der Pyramide, die Teilung des Winkels, ausschließen; alle Betrachtungen über die Grundbegriffe, über Kontinuität und den Zusammenhang des Systems würden fallen. So habe ich mich entschlossen, in erster Linie auf die Bedürfnisse der Lehrer an den Mittelschulen Rücksicht zu nehmen. Die Kegelschnitte sind freilich heute durchaus elementar, der österreichische Lehrplan verweist sie nach Tertia; aber sie wurden wegen des ungeheuren Umfanges ihrer Literatur abgetrennt.

Noch ein zweiter Umstand war zu beachten. Die großen Geometer vom Schluß des 18. bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts haben Werke hinterlassen, die für den Unterricht unentbehrlich sind, und die außerdem eine äußerst große Anzahl elementar-geometrischer Sätze enthalten. Man hätte *Carnot*'s De la corrélation und die Géométrie de la position, *Jak. Steiner*'s Geometrische Konstruktionen *ganz*, *Poncelet*'s Traité des propriétés projectives und *Chasles*' Géométrie supérieure zum großen Teil abschreiben müssen. Ich zähle diese Standard-Werke einfach auf. Es sind außer den genannten: *Monge*'s und *Hachette*'s Géométrie descriptive, *Chasles*' Aperçu historique, *Cremona*'s Projektive Geometrie, *von Staudt*'s Geometrie der Lage, *Möbius*' Barycentrischer Calcül.

Aber auch die analytische Geometrie fordert Beachtung, man denke nur an *Gergonne*'s Lösung des Taktionsproblems; viele elementargeometrische Sätze sind analytisch gefunden.

Überblickt man die Elementargeometrie im 19. Jahrhundert, so ist vor allem hervorzuheben, wie die großen Strömungen der Wissen-

schaft auch in der Elementargeometrie zutage treten. Die *Darwin*sche Theorie der Entstehung der Arten zeigt sich als systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten; langsam, aber schließlich ohne Widerspruch setzt sich die Benutzung geometrischer Verwandtschaften auch in den Lehrbüchern der Elementargeometrie durch, und die Resultate der neueren Geometrie werden Gemeingut. Am Schluß des Jahrhunderts ist die ganze *Monge-Servois-Brianchon*sche Lehre von Pol und Polare, die *Gaultier-Steiner*sche der Kreisbüschel, die Theorie der Involution und der Kegelschnitte — von Transversalen, harmonischer Teilung usw. zu schweigen — in die Schule gedrungen, und die Trigonometrie der Schule, ebene wie sphärische, hat eine Ausdehnung erfahren, die früher für Astronomen hingereicht hätte.

Auch der zweite große Zug des Jahrhunderts, der kritische, ist in der Elementargeometrie in hohem Grade wirksam. Von *Hume, Leibniz, d'Alembert* und vor allem von *Kant* und *Bolzano* geht die Frage nach dem Wesen der Geometrie aus; man fragt, woher sie ihre Sicherheit nehme, und nach dem Grade dieser Sicherheit, und dann kommt *Gauß* bei der Untersuchung der Euklidischen Postulate zu der Erkenntnis, daß die Grundlagen der Geometrie Erfahrungstatsachen sind, und *Johann Bolyai* und *Lobatschefskij* erbauen eine absolute Geometrie.

Die Fragen nach der Anzahl, dem Zusammenhang, der Tragweite der Axiome werden heiß umworben, und sie können am Schluß des Jahrhunderts durch *Pasch, Hilbert, Veronese, Ingrami, Enriques* als gelöst gelten. Strenge der Beweise, Ordnung der Sätze nach innerem Zusammenhange werden gefordert und geleistet. Die französische Revolution, die alle Autoritäten zertrümmerte, wendet sich auch gegen *Euklid*; es entstehen, angeregt vielleicht durch *d'Alembert*, mehr noch durch den Gegensatz zu den bedeutenden Leistungen der Jesuiten, die Elemente *Legendre*'s und erobern rasch das ganze Gebiet der romanischen Völker, einschließlich Belgien und Holland. Mit ihnen beginnt die Arithmetisierung der Geometrie; sie gewinnt durch *Weierstraß* Macht, führt in *Georg Cantor*'s Mengenlehre zu dem Versuch, den rein geometrischen Begriff der Kontinuität arithmetisch zu definieren, und findet ihren schärfsten Ausdruck in *Hilbert*'s Grundlagen; sie zeigt sich noch sehr scharf in den letzten und vielleicht bedeutendsten für die Schule bestimmten Büchern von *Veronese* und *Ingrami*.

Und dazu kommt wieder ein dritter großer Zug der Zeit: das Gesetz der Kontinuität, das *Leibniz* für seine größte Entdeckung erachtete, wird Gemeingut, und mächtig erweitert sich damit das Interesse für das historische Werden. Es wird klar, daß *Monge*, für dessen Wertung ich auf die Brünner Programme von *Obenrauch* 1893 und 1895 ver-

weise, an *Lambert* anknüpft und dieser an *Dürer* und *Leonardo da Vinci*, und schließlich verfolgen wir die darstellende Geometrie bis zu Grundriß und Aufriß der Säule im Tempel von Phile!

Poncelet knüpft an *Desargues* an, *Steiner* an *La Hire*, *Gauß* an *Lambert* und dieser an *Saccheri* usw. bis *Proklos* und *Heron*. Die Arbeiten von *Chasles*, *Cantor*, *Zeuthen*, *Heiberg*, *Hultsch*, *Friedlein*, *Allman*, *Loria* und wahrlich nicht als die letzten die von *Tannery* haben uns die griechische Mathematik erschlossen, *Colebrooke* die indische, *Woepcke*, *Munk* die arabische, *Steinschneider* die hebräische.

Dabei zeigt es sich denn allerdings, daß unsere Elementargeometrie, was die Materie betrifft, wenig über die der Hellenen oder der Araber hinausgekommen ist. Eine Unmenge der Sätze, welche als neu die Zeitschriften füllten, sind teils direkt alt, teils neu nur in der Form, teils Spezialisierung alter Sätze. Ich erinnere nur an den *Menelaos*, an die Transversalentheorie, insbesondere an das Porisma 176, an die Flächensätze von *Pappus*, an die *Guldin*sche Regel usw. Ist doch die Radikalachse schon den Arabern bekannt gewesen.

Eine genaue Durcharbeitung von *Clavius*, *Cusanus* usw. würde manchen Prioritätsstreit überflüssig machen. Überhaupt ist es sonderbar, wie oft dieselben Gedanken — ob bewußt oder unbewußt, ist manchmal schwer zu entscheiden — wiederkehren. Ich verweise auf die einzelnen Probleme, erwähne die vielen Beweise des *Pythagoras*, der freilich selbst seinen Satz den Indern entlehnt hat, verweise auf *Steiner*, der *Gaultier* ganz verschwiegen hat, auf die „*Gouzy*sche“ mittlere Proportionale, auf die „*Schwab*sche“ Methode der Isoperimetrie für die Kreisberechnung, auf den Streit um die Entdeckung der reziproken Radien, den Gedanken, gleichzeitig mit Richtung und Länge der Strecke zu rechnen, der bei *Plücker*, *Bellavitis*, *Möbius*, *Hamilton*, *Scheffler* unabhängig entsteht; ich erinnnere ferner an *Killing*'s „*Weierstraß*sche“ Koordinaten, an *Cayley*'s Entdeckung der „*Cagnoli*schen“ Formeln, von *Gauß-Delambre-Mollweide* zu schweigen, usw. usw.

Dennoch ist die geistige Arbeit auch auf unserem Gebiet gewaltig gewesen; es hat seine Größen wie die anderen. Ich lasse Lebende unerwähnt und nenne nur: *L'Huilier*, *Servois*, *Durrande*, den viel zu früh Dahingerafften; *Bobillier*, *Catalan*, *T. S. Davies*, *Weddle*, *Wallace*, *Mason*, *Levy*, *Rutherford*, *Todhunter*, *Kelland*, *Townsend*, *Hart*, die Winterthurer *Adams* und *Moosbrugger*; *Nagel*, *Reuschle*, *C. F. A. Jacobi*, *Bretschneider*, *Baltzer*; *Malfatti*, *Bellavitis*, *De Zolt*, *Bettazzi*, *Garnier*, *van Swinden*, *van Geldern*, *Wolfgang* und *Johann Bolyai*, *Nikolaus Lobatschefskij*.

Die Güte des verstorbenen Direktors *Barack*, des Gründers der Straßburger Bibliothek, und seines Nachfolgers, Hrn. *Eutings*, hat mir

die Benutzung dieser Bibliothek in hohem Grade erleichtert; der Abteilungschef, Hr. *Landauer*, hat mich nach Kräften unterstützt, aber die Straßburger Bibliothek hat gerade auf elementar-geometrischem Gebiete große Lücken. Hätte mir nicht mein verehrter Freund *Neuberg* das Journal élémentaire von *Bourget* (Longchamps) und die Mathesis geschickt, so würde ich auch diese wichtigen Quellen haben entbehren müssen. Kurze Zeit konnte ich in Berlin arbeiten, wo mir der Oberbibliothekar Dr. *Valentin* jede mögliche Hilfe zuteil werden ließ. *Gino Loria* habe ich für einen Bericht über die Entwicklung des italienischen Unterrichts zu danken.

Das Referat schließt im wesentlichen mit dem Jahre 1900 ab, nur ausnahmsweise sind literarische Erscheinungen bis 1903 berücksichtigt.

Und nun noch eine persönliche Bemerkung. Ich habe versucht, soweit es mir möglich war, aus eigener Kenntnis zu urteilen, aber niemand kann von der Unzulänglichkeit des Referats schärfer überzeugt sein als ich selber.

2. Geschichte (Bibliographie). Die Geschichte der Elementargeometrie ist im wesentlichen die der ägyptischen, griechischen, indischen, arabischen Geometrie, wozu etwa die Periode von 800—1600 (*Vieta* und *Fermat*) der europäischen Geometrie kommt. Wegen der Geschichte der einzelnen Probleme vergleiche man die unten folgenden besonderen Abschnitte.

Das Hauptwerk des Jahrhunderts sind *Moritz Cantor*'s Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, und sie werden es bleiben, auch wenn es dem Werke ergangen sein wird wie seinem Vorgänger im 18. Jahrhundert, der großartigen Histoire des Mathématiques *Montucla*'s. Auch *Cantor* wird die von seinem Werk ausgehende Einzelforschung nachweisen, daß er in sehr vielen Einzelheiten geirrt hat.

Zwei Momente sind besonders wichtig: 1) im Anfang des Jahrhunderts wurde die indische Mathematik erschlossen und 2) schuf der Neuhumanismus eine philologische Schule, die mit einer früher unbekannten Schärfe und mit entsprechendem Erfolg die Werke der Ägypter, Hellenen, Inder, Araber, Hebräer edierte.

Vorlesungen an den Hochschulen (ich nenne nur *Cantor*, *Mansion*, *Loria*) verbreiteten das Interesse an historischer Forschung, und schließlich erkannten auch die Gymnasiallehrer ihre Bedeutung für den Unterricht. Ich zitiere aus meiner Methodik und Didaktik (*Baumeister*, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen, München 1895): „Die Schüler sind von Sekunda an für geschichtliche Mitteilungen sehr dankbar; sie fühlen ganz richtig heraus, daß der

Einblick in das historische Werden der Erkenntnis zugleich auch das beste Verständnis für das Gewordene vermittelt. Für den Lehrer ist dieser Einblick ganz besonders wichtig, weil nur die Geschichte Aufklärung gibt über die Schwierigkeiten, welche der Geist bei der Bewältigung der einzelnen Probleme zu überwinden hat. Dazu kommt noch ein anderer Umstand, der für die Schule ganz besonders zu betonen ist, der Hinweis nämlich auf den Zusammenhang aller Kulturarbeit, d. i. kurz, auf die Einheit des menschlichen Geistes."

Ich zähle zunächst die bedeutendsten unter den Historikern der Elementargeometrie auf. In Belgien: *H. Quetelet* und *P. Mansion*; in Dänemark: *J. Heiberg* und *H. Zeuthen*; in Deutschland: *Nesselmann, Ofterdinger, Bretschneider, Hankel, Maxim. Curtze, Treutlein, S. Günther* und in neuester Zeit *Engel, Stäckel, von Braunmühl*; in England: *Allman, Rouse Ball, Glaisher, Todhunter, Gow, Heath, C. Taylor, Mackay,* der für eine Anzahl elementargeometrischer Probleme das Material, insbesondere das englische, durchforscht hat. In Frankreich sind zu nennen: *Delambre, Bossut, Halma, Vincent, Chasles,* der mit seinem Aperçu historique auch für Deutschland den Anstoß gegeben hat, *Terquem, H. Martin,* der Heroforscher, *Sédillot,* der überall griechischen Einfluß im Orient nachzuweisen sucht, *C. Henry* und vor allem *Paul Tannery,* wohl der bedeutendste Kenner griechischer Elementargeometrie. In Holland hat *Bierens de Haan* „Baustein um Baustein" zur holländischen Geschichte herbeigetragen. In Italien hat Fürst *Boncompagni* sein ganzes Vermögen der Geschichte der Mathematik und dem Bulletino Boncompagni geopfert, für das *Gino Loria,* der Vorkämpfer historischer Forschung, neuerdings einen kleinen Ersatz geschaffen hat; dann sind dort: *Favaro,* der Galileiforscher, *Narducci, Govi, Riccardi,* der Bibliograph *Euklid's* und seiner fünf Postulate, und *Vincenzio Flauti,* der Herausgeber des *Euklid,* und es sei auch *G. Libri* nicht vergessen. Der schwedische Forscher *G. Eneström* hat die in Deutschland erscheinende Bibliotheca Mathematica jetzt geradezu zum Zentrum der historischen und bibliographischen Bestrebungen gemacht. In der Schweiz sind der wackere *R. Wolf, H. Suter, Graf* und in neuester Zeit sehr erfolgreich *F. Rudio* aufgetreten. In Rußland sind *Waschtschenko, Bobynin* und *Alexejef* zu nennen, und in Amerika *Cajori, Baker* und *Halsted* und selbst in Japan *Kikuchi* und *Fujisawa.*

Wie *Colebrooke* und *Taylor* die indische Mathematik, so erschloß der Papyrus Rhind die ägyptische; orientalische und klassische Philologen, von denen einige zugleich Mathematiker waren, wie *Woepcke* und *Friedlein,* klärten uns über die betreffende Mathematik auf; ich nenne *Woepcke, Oppert, Munk, Rodet, Steinschneider, Thibaut* für orientalische

und hebräische Literatur und *Letronne, Vincent, Nokk, Friedlein, Hultsch, Heiberg, Menke, Diels, Heath* für hellenische.

Sehr viel Material birgt das Journal asiatique, die Zeitschrift für Ägyptologie (*Borchardt*), die Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft, der Bursian, der Philologus, die Revue scientifique, die historisch-literarische Abteilung der Zeitschr. f. Math. u. Phys.

Von Lehrbüchern, die für die Schule bestimmt sind, kenne ich nur eins, das einen wirklichen geschichtlichen Überblick liefert, es ist der Traité von *Rouché et de Comberousse,* insbesondere die VII. Auflage von 1900. Als Quelle vielfacher historischer Belehrung muß auch das Werk *Questioni riguardanti la geometria elementare* von *Fed. Enriques,* Bologna 1900, angesehen werden.

Nun zu den Einzelheiten:

An der Schwelle des Jahrhunderts steht:

Abrah. Kästner's fleißiges Werk Geschichte der Mathematik, Göttingen 1796—1800.

Ch. Bossut, Essai sur l'histoire générale des Mathématiques, Paris 1802, in alle Kultursprachen übersetzt.

J. B. J. Delambre, Arithmétique des Grecs, Paris 1807 (Einleitung seiner Astronomie. Auch in *F. Peyrard*'s franz. Ausgabe des *Archimedes*, Paris 1807).

F. Peyrard, die große dreisprachige *Euklid*-Ausgabe (Elemente und Data) 1814—1818, die erste mit Benutzung des Vaticanus 190, der älter ist als *Theon*'s Bearbeitung; daneben nenne ich die griechische Ausgabe von:

E. F. August 1826—1829. (S. über die *Euklid*-Ausgaben und Übersetzungen *P. Riccardi*, Bol. Mem. 1887—1890, und *Max Simon, Euklid* und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig Teubner, 1901.)

Halma's Übersetzung des *Almagest* ins Französische (mit Noten von *Delambre*) Paris 1813—1816.

Acharya's (*Bhascara*) Lilawati, englisch von *Joh. Taylor*, Bombay 1816 (1821 *Theon*'s Kommentar).

H. T. Colebrooke, Indian Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of *Brahmegupta* and *Bhascara* translated; London 1817.

J. H. M. Poppe, Geschichte der Mathematik seit der ältesten bis auf die neueste Zeit. Tübingen, 1828.

G. S. Klügel's Mathematisches Wörterbuch, Leipzig 1803—1836, ein Versuch, ähnlich wie die jetzige Enzyklopädie, aber auf eigene Faust, die Mathematik seiner Zeit zu kodifizieren; bis 1808 *Klügel*, dann:

C. B. Mollweide und *J. A. Grunert* (Q — Z) und zwei Supplementbände von *Grunert* allein, 1833 und 1836; *Mollweide* und *Grunert* bringen besonders viel Literaturangaben.

E. Nizze, Deutsche Ausgabe des *Archimedes*, Stralsund 1824. id. ibid. 1826 Die Sphärik des *Theodosius* (griech. u. lat. Berlin 1852).

Mich. Chasles, Aperçu historique, Paris 1837; zweite, unveränderte, Auflage 1875; dritte 1889.

G. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, Paris 1838—1841 (Renaissance bis 1700).

F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen 1842; leider nur der I. Teil. [Da die Algebra der Griechen geometrische Einkleidung hatte, oder vielleicht richtiger, die Geometrie algebraische Grundlage hatte, so ist das für seine Zeit ausgezeichnete Werk auch für die Elementargeometrie wichtig.]

L. A. Sédillot, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, Paris 1845, 1849.

F. Woepcke, 1851 Journal Asiatique. Übersetzung eines arabischen Manuskripts der verlorenen *Euklidischen* Schrift *Περὶ διαιρέσεων* (über Teilung von Figuren) (*Dee* 1563); daraufhin hat

L. F. Ofterdinger 1853 den Versuch einer Rekonstituierung, Programm Ulm, gemacht; dazu

A. Favaro, Preliminarie ad una restituzione del libro di *Euclide* sulla divisibilità delle figure piane Ven. Ist. Atti (6) I (dem *Ofterdinger* entgangen ist).

H. Martin, 1854 Mémoires présentés par des savants à l'académie des inscriptions etc. I. weist nach, daß nur ein *Heron* (etwa 100 v. Chr., s. aber unten) existiert hat.

A. Arneth, Geschichte der Mathematik, Stuttgart 1854, eine für ihre Zeit tüchtige Arbeit.

C. Waddington, Ramus (Pierre de la Ramée) sa vie, ses écrits et ses opinions Paris 1856. Ramus, der die Welt von den Fesseln der Scholastik und des von ihr mißverstandenen *Aristoteles* befreite, hat auch die Autorität des *Euklid* in scharfer Kritik bestritten. (Scholarum math. libri III.)

O. Terquem, seit 1855 bis zu seinem Tode 1862 Herausgeber des Bulletin de Bibliographie d'Histoire etc. als Anhang zu den Nouvelles Annales.

M. Cantor, seit 1856 bis 1900 Redakteur der literarhistorischen Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Mich. Chasles, Les trois livres de porismes d'*Euclide* rétablis 1860 (dazu *Buchbinder*, Programm Schulpforta 1866).

L. F. Ofterdinger, Beitrag zur Geschichte der Mathematik, Programm Ulm 1860. *Ofterdinger* vermutet, daß *Archimedes* seine Volumenbestimmungen zunächst empirisch durch Wage und Hohlmaß gemacht habe, nach Art der Ägypter, was durch *Heron*'s Metrica, Ausgabe von *H. Schöne*, Leipzig 1903, Buch 2, Kap. 20 völlig evident wird.

L. Cremona, Considerazioni di storia di geometria, Milano 1860, kurzer Überblick.

J. T. H. Müller, Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker, Leipzig, Teubner 1860.

C. Blaß, De Platone mathematico, Bonn 1861.

J. T. H. Müller, Zur Geschichte des *Dualismus* in der Geometrie, Archiv Math. Phys. 36, p. 1. (Hinweis auf *Maurolycus*.)

Fr. Hultsch, Ausgabe des *Heron*, Berlin 1864, von der Kritik durchaus anerkannt; 35 Jahre darauf wurde infolge der Auffindung arabischer Manuskripte eine neue Ausgabe von

W. Schmidt veranstaltet, Leipzig 1899, wonach *Heron*, als unzweifelhaft von *Posidonius* beeinflußt, statt um 100 v. Chr. etwa um 100 n. Chr. zu setzen ist, aber *E. Hoppe*, Progr. 815, Hamburg 1902, schließt sich wieder *Cantor* an, indem

er einen zweiten *Posidonius* vor *Archimedes* annimmt, und seine Argumentation wird auch durch die Metrik von *H. Schöne*, 1903 ediert, bestätigt.

A. Quetelet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges 1864 (Würdigung von *Cantor*, Zeitschr. Math. Phys. 1866, p. 291). Von da ab fotgesetzt durch

P. Mansion in wiederholten Berichten.

L. Spengel, ***Eudemii*** Rhodii Peripatetici fragmenta, 1. Aufl. 1865, 2. Aufl. Berlin 1870. *Eudemos*, ein unmittelbarer Schüler des *Aristoteles*, schrieb etwa 30 Jahre vor *Euklid* eine Geschichte der Mathematik, von der Reste durch *Proklos, Eutokios* und in einem Bericht über die Lunulae Hippocratis im Simplicius-Kommentar zur Physik des *Aristoteles* erhalten sind. Vergleiche dazu

F. Rudio, Der Bericht des Simplicius, Bibl. math. (3), 3, p. 7—62 und Zusatz (3), 4, p. 13. — *Rudio*'s Konjektur, daß tmēma dort Sektor und nicht wie meistens Segment bedeute, ist im höchsten Grade einleuchtend.

M. Cantor's Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, Halle 1863; ich nenne gleich die anderen Vorarbeiten: *Euklid* und sein Jahrhundert (*Schlömilch* 12 [1867]; Die römischen Agrimensoren, Leipzig 1875.)

Herm. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, Festrede, Tübingen 1869, mehrfach in fremde Sprachen übersetzt.

C. A. ***Bretschneider***, Die Geometrie und die Geometer vor *Euklides*, Leipzig 1870; Wertung bei *Cantor*, Zeitschr. Math. Phys. 16 [1871]; ein Werk, das beinahe die Mathematik vor *Euklid* entdeckt hat, vgl. aber oben *F. Rudio*.

Mich. Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie, Paris 1870. (Deutschland etwas vernachlässigt.)

G. Friedlein, ***Proklos***, Leipzig 1873; die erste griechische Textausgabe seit *Simon Grynaeus*, Basel 1533; die lateinische Übersetzung von *F. Barozzi*, Padua 1560 ist nur eine Wortübertragung und sie ist von *Taylor* ebenso ins Englische übersetzt word; eineen deutsche Übersetzung einiger Teile gibt es von *Majer*, Programm Tübingen 1876, Petita und Axiomata; Programm Stuttgart 1881. Die Definitionen; vergl. auch

Joach. H. Knoche, Programm Herford 1862, und vorher Def. 4, 1856, der auf *C. F. Hauber*, Chrestomatia geometrica, Tübingen 1820, fußt.

G. Govi, Sur l'invention de quelques étalons naturels de mesure (Histoire des sciences, Torino) 1871.

G. Friedlein, Beiträge zur Geschichte der Mathematik, Hof 1869, 72, *Platon* 1873.

H. Suter, Geschichte der mathem. Wissenschaften, Zürich, Band 1, 2. Aufl. 1873, von *Cantor* getadelt; der andere Band (1875) erheblich besser beurteilt.

H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter, Leipzig, 1874, aus dem Nachlaß unvollendet vom Vater herausgegeben, trotz mancher Mängel im einzelnen ein vorzüglicher Überblick über die Mathematik der Hellenen, Inder und Araber.

H. Menge, Des *Archimedes* Kreismessung nebst des *Eutokios* aus Askalon Kommentar (s. Übersetzung der *κύκλου μέτρησις* von *F. Rudio*), Programm. Koblenz 1874.

G. Friedlein weist nach, daß *Hypsikles* (2. Jahrhundert v. Chr.) Verfasser des 14. Buchs der Elemente ist, *Boncompagni*, Bull. 6 (1873).

H. Martin bestätigt das und bestimmt als Verfasser des 15. Buches einen Schüler des *Isidorus* etwa 530 n. Chr., *Boncompagni* (Bull. 7).

A. Favaro, Saggio della cronografia dei matematici dell' antichità, Padova 1875.

Pappi Alexandrini Collectiones, die Kodifikation der hellenischen Mathematik, das wichtigste Quellenwerk, mustergültig von

F. Hultsch 1875—78 ediert (Buch 7 und 8, deutsch von *Gerhardt,* Halle 1871, dazu Programm Eisleben 1875); ausführliches Referat von

M. Cantor, Zeitschr. Math. Phys. 21, 22, 24, hist.-lit. Abt.

S. Günther, Zur Geschichte der deutschen Mathematik im 15. Jahrhundert, Zeitschr. Math. Phys. 20 (1875), hist.-lit. Abt., p. 1.

S. Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch historischen Forschung, Erlangen 1876.

M. Cantor, Graeco-indische Studien, Zeitschr. Math. Phys. (1877), hist.-lit. Abt., p. 1 (Nov. 1876).

Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie, 1877; sehr viele historische Notizen, auch für Elementargeometrie inkl. Trigonometrie.

Aug. Eisenlohr, ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (***Papyrus Rhind***), das Vademekum für Feldmesser des Schreibers *Ahmes,* Leipzig 1877, 2. Aufl. 1891. Über dieses wichtigste und bis vor kurzem älteste Quellenwerk der ägyptischen Mathematik ist im Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Math. erst Bd. **22,** p. 9 (1890) ein Referat gegeben; weder in der Zeitschr. Math. Phys., noch im Bulletino von *Boncompagni,* noch in der Bibliographie der Nouvelles annales fand ich eine bezügliche Bemerkung; nur eine Notiz über das ausführliche Referat von

A. Favaro, Modena 1879; Papyrus Rhind ist dabei von *Cantor* 1880 ausgenutzt; eine neue Ausgabe von berufener Seite steht bevor, da die von *Eisenlohr* der heutigen Ägyptologie nicht mehr genügt. Eine sehr ausführliche Besprechung von *E. Révillot* findet sich in seiner Revue égyptologique p. 308, dessen Ansicht, daß der Papyrus Ahmes von *Cantor* außerordentlich überschätzt ist, sich Referent anschließt.

C. J. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877.

G. J. Allman, Greek geometry from *Thales* to *Euclid,* Dublin 1877, 1881 und dann abgeschlossen 1889; Sammlung von 6 in der Dubliner Zeitschrift *Hermathena* erschienenen Aufsätzen, Fortschritt gegen *Bretschneider.*

B. Rothlauf, Die Mathematik zu *Platon*'s Zeiten und seine Beziehung zu ihr, München 1878.

J. L. Heiberg, Quaestiones Archimedicae 1879, ebenso wie Die Kenntnisse des *Archimedes* über die Kegelschnitte, Zeitschr. Math. Phys. 25, hist.-lit. Abt., p. 41, und einige von *Archimedes* vorausgesetzte elementare Kenntnisse, Zeitschr. Math. Phys. 24, hist.-lit. Abt., p. 177, eine Vorfrucht seiner Ausgabe ***Archimedis*** opera omnia cum commentariis Eutocii, vollständige Edition mit allen Mitteln moderner Philologie. Leipzig 1880—81.

L. Rodet, Journal asiatique 7. 13, 1879. Übersetzung des Aryabhatta (des ersten großen indischen Mathematikers).

Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig, I 1880; II 1892; III 1894; III 3 1898; 2. Aufl. I 1898; II 1 1899; III bis 1901. Die rasche Folge der Auflage zeigt am besten, wie sehr das historische Interesse erstarkt ist.

H. Klamroth, Über den arabischen Euklid; Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft 35 (1881); dazu

J. L. Heiberg, Die arabische Tradition der Elemente des *Euklid*, Zeitschr. Math. Phys. 29, p. 1—29; und

Steinschneider, *Euklid* bei den Arabern, Zeitschr. Math. Phys. 31, p. 81.

G. Bauer, Gedächtnißrede auf *Otto Hesse*; Münch. Ber. 1882 (zugleich Überblick über die Entwicklung der Geometrie in großen Zügen).

F. de Boer, De Wiskunde der Indiers, Rede, Leiden 1884.

C. Blaß, Dissertatio de Gemino et Posidonio, Kiel 1883 (Geminos, etwa um 50 v. Chr. nach *Tannery*, ist nach *Blaß* gleichzeitig mit *Posidonius* (vgl. *Tannery* in La géométrie grecque, p. 29).

Paul Tannery, Das Delische Problem (Würfelverdoppelung), Bord. Mém. (2) 2, 1878, p. 277; *Hippocrates* von Chios, Bord. Mém. (2) **2**, 1878, p. 178. Thalès et ses emprunts à l'Egypte, Revue philosophique 5 (1880); Quelques fragments d'*Apollonius* de Perge (besonders *Proklos* ausgenutzt), Bull. sc. math. (2) 5 (1881), p. 124; Sur la mesure du cercle d'*Archimède*, ibid. p. 161, Bord. Mém. (2) 4, p. 313; L'arithmétique des Grecs dans *Héron d'Alexandrie*, ibid., p. 395; De la solution *géométrique* des problèmes du second degré avant *Euclide* (Pythagoräer), Bord. Mém. (2) 4 (1881), p. 325; Le fragment d'*Eudème* sur la quadrature des lunules (über *Allman* hinausgehend, s. *Spengel*), ebenda 2 (5) 1882, p. 257; Aristarque de Samos, ibid. p. 237; Sur une critique ancienne (Pappos) d'une démonstration d'*Archimède*, ibid. p. 49; La *stéréométrie de Héron* d'Alexandrie und Études *héroniennes*, 1883, p. 305, p. 347. Die in dem Bull. sc. math. veröffentlichten Arbeiten *Tannery*'s wurden dann gesammelt in „***La géométrie grecque***", Paris 1887, I. Teil, der zweite ist unterblieben, infolge des Erscheinens von

H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen, dänisch 1885, deutsch (von *Fischer-Benzon*) 1886.

Max. Marie, Histoire des sciences mathématiques et physiques, Bände 1—3 (*Thales* bis *Diophant*), Paris 1883 und 84.

Waschtschenko, Geschichte der Mathematik (russisch), Bd. I 1883.

Emil Weyr, Über die Geometrie der alten Ägypter, Festrede, Wien 1884, im *Almanach* der Akademie, dazu

M. Cantor, Über den sogenannten „*Seqt*" der alten Ägypter, Wien. Ber. 1889 (Seqt Tangente und Cosinus); vgl. Trigonometrie.

J. L. Heiberg und *H. Menge*, ***Euclidis*** opera omnia, Leipzig 1883—1893; seit *Gregory* (1702) die erste vollständige *Euklid*-Ausgabe; vorangehen *Heiberg*'s *Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid*, Leipzig 1882; von *Menge* sind die Data, Bd. 6, 1896. Für Buch 10—13 hat *Heiberg* den von ihm, Philologus 44, Bd. 53, beschriebenen *Palimpsest* (älter als *Theon*) benutzt. Für Buch 14 des Hypsikles versagte der Vatikanus (*Peyrard*) 190, und der Monacensis 427 trat an seine Stelle. Ein *Supplementband* 1899, *Anaritii* Kommentar ist von

Max. Curtze. *Curtze* hatte in Krakau eine vollständige lateinische Übersetzung des Kommentars des An-Naïrizi (arabisch) von *Gerhard v. Cremona* aus dem Ende des 12. Jahrhunderts gefunden, die für die ersten 10 Bücher und ganz besonders für die Würdigung von *Heron* sehr wichtig ist, insbesondere es klar stellt, daß *Heron* einen Kommentar zum *Euklid* verfaßt hat (Referat von *Cantor*, Zeitschr. Math. Phys., hist.-lit. Abt., 1899).

J. Gow, A short history of Greek mathematics 1884 (anschließend an *Bretschneider*, *Hankel*, *Cantor*, aber seinen Landsmann *Allman* nicht berücksichtigend).

Th. Reye, Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit,

Rektorrede, Straßburg 1886, 2. Aufl. 1899, auch im XI. Band des Jahrbuchs der Deutsch. Math. Verein. 1901.

S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525 (*Kehrbach*, Monumenta Germaniae Paedagogica 3 [1887]); *Geschichte der antiken Naturwissenschaften*, in *Iwan Müller*'s Handbuch des klassischen Altertums, 5 (1888), Abt. 1, sehr gut orientierend und reich an Literaturangaben.

W. W. Rouse Ball, A short account of the history of Mathematics London 1888, 2. Aufl. 1893.

F. Cajori, The teaching and history of mathematics in the United States (ein riesiges auf 1000 Fragebogen gesammeltes Material) Washington 1890; nach *Cajori* beginnt wissenschaftliches Leben in Nordamerika mit der Gründung der Johns Hopkins University und *Sylvester*'s Berufung an diese.

G. Heppel, The use of history in teaching mathematics 14. Januar 1893 gelesen vor der A. I. G. T. (s. Methodik), Nature 48 (1893), p. 16.

Gino Loria, *Il periodo aureo della geometria greca*, Torino 1890 (Tor. Mem. (2) 40); *Euklid, Archimedes, Eratosthenes, Apollonius, Hypsikles, Nikomachus, Diokles, Perseus, Zenodoros;* idem Modena 1893: Le scienze esatte nell' antica, Grecia, ein Werk, das sich mählig auf 5 Teile, „Bücher" betitelt, ausgedehnt hat, Schluß 1902. Wir schließen gleich sein Hauptwerk an: *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, 2. Aufl. 1896 (1. Aufl. mehr Skizze 1887) und *Della varia fortuna di Euclide*, Rom 1893 und Gelegenheitsschriften: L'odierno indirizzo e gli attuali problemi storia delle matematische (Appell an die Historiker mitzuhelfen 1892). Artikel *Ma'ematica* 1896 im Dizionario illustrato di pedagogia di Martinazzoli; *La storia della matematica* (Torino 15. Sept. 1898, Periodico XIV), wo *Loria* sich sehr treffend über die historische Vorbildung der Lehramtskandidaten ausspricht. Le trasfigurazioni di una scienza, Genova 1900 Festrede.

K. Fink, kurzer Abriß einer Geschichte der Elementarmathematik, Tübingen 1890; englische Übersetzung von *W. W. Beman* und *D. E. Smith.* Chicago, 1900, 333 S. 8°.

J. B. Heiberg, Apollonius. Leipzig 1891.

A. Brill, Streifblicke zur Geschichte der Geometrie (aus der 1889 gehaltenen Tübinger Antrittsrede 1891 in den Mitteilungen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg), betont den historischen Zusammenhang zwischen Theorie und Praxis.

H. G. Zeuthen, Die Konstruktionen als Existenzbeweis in der griechischen Mathematik (dänisch) Nyt. Tids. III A 105, 1892. idem: 1893; Deutsch: *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* 1896, Referat: *G. Loria, Periodico* II, S. 1, 1896, fortgesetzt 1903.

F. Rudio, Über den Anteil der mathematischen Wissenschaft an der Kultur der Renaissance, Hamburg 1892 (*Leonardo da Vinci; Regiomontan*'s Ephemeriden und Columbus).

F. Cajori, A history of mathematics 1894; *A history of elementary mathematics* with hints on methods of teaching 1896.

J. L. Heiberg, Sereni Antinoensis opusculus 1896.

M. Curtze, Zur Geschichte der Übersetzungen der Elemente im Mittelalter, Bibl. math. (2) 10 (1896).

T. L. Heath, Apollonius' Kegelschnitte mit einer historischen Einleitung (englisch) Cambridge 1896 und *Archimedes* desgl. 1897.

A. Bürk, Das Apastamba-Sulba-Sutra; Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft 1901, p. 543 Feststellung der indischen Kenntnisse in Geometrie bis 800 v. Chr. (siehe unten unter Pythagoras) vorher:

George Thibaut, The sulvasutra's, Calcutta 1875.

H. v. Mangoldt, Bilder aus der Entwicklung der reinen und angewandten Mathematik während des XIX. Jahrhunderts, Festrede, Aachen 1899.

J. Boyer, Histoire des mathématiques, Paris 1900; und zum Schluß des Altmeisters *M. Cantor* Vortrag auf dem Pariser internationalen Kongreß: *L'Historiographie des mathématiques.*

J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. 1 (1902), Bd. 2 (1903).

3. Methodik. Die Methodik des geometrischen Elementarunterrichts steht in ganz engem Zusammenhang mit der Philosophie; die große Frage, ob die Geometrie zu den reinen Geisteswissenschaften oder zu den Erfahrungswissenschaften gehört, ist noch immer streitig. Stehen auf der einen Seite *Bolzano* und *Kant,* so auf der andern *Gauß* und *Riemann* und mit ihnen die Gesamtheit der jetzigen Hochschulmathematiker. — *Ampère* hat in seiner großen Klassifikation aller Wissenschaften die Mathematik an die Spitze der Erfahrungswissenschaften gestellt (Philosophie des sciences, Paris 1835). Referent hat seinem eigenen Standpunkt in der Festschrift für *E. E. Kummer* Ausdruck gegeben: „Die Geometrie ist eine chemische Verbindung von Anschauung und Logik, aber der Logik gebührt der Löwenanteil.“ Man lese auch den ersten Artikel in *F. Enriques,* Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900.

Wir haben jetzt in allen Ländern für die Methodik des Unterrichts bestimmte Zeitschriften, wie die *Hoffmann*sche in Deutschland, den Periodico in Italien, *Langley*'s Mathem. Gaz., aber sie füllen ihre Spalten nicht mit Methodik, sondern mit Methoden; eine Ausnahme schien die 1899 begründete *Laisant-Fehr*sche Zeitschrift „L'enseignement mathématique“ zu bilden. Es ist ja auch klar, daß ein Werk wie *Petersen*'s Methoden und Theorien, so wenig es auch den Schülern *Schellbach*'s und *Bertram*'s Neues bot, auf die Methodik Einfluß geübt hat, und gleicher Einfluß oder noch größerer kommt *Paul Serret*'s Des méthodes (1855) und besonders dem großen Werke *Duhamel*'s von 1865—68 und auch seiner Differentialrechnung zu.

Sehr viel Material ist in den Zeitschriften zerstreut, wie z. B. in den *Rethwisch*schen Jahresberichten von *Thaer,* in den Literaturberichten *Moritz Cantor*'s, *Terquem*'s (Nouv. Annales), *Loria*'s, ebenso in Reden, in Rektoratsreden wie die *Reye*sche und die von *Guido Hauck*, viel in Besprechungen, in den Direktorenkonferenzen, auf Kongressen, das

meiste in den Vorreden der Lehrbücher, besonders der deutschen, da es deren Verfasser lieben, die Berechtigung ihrer Bücher a priori zu begründen.

Es besteht seit längerer Zeit (1891) in Deutschland der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften mit einem eigenen Organ (seit 1895), den „Unterrichtsblättern"; das in *Bernhard Schwalbe* für den naturwissenschaftlichen Teil eine so stolze Kraft gefunden hatte, für den mathematischen aber unter Leitung der Herren *Pietzker* und *Richter* (Wandsbeck) manch seltsame Blüte getrieben hat. Ich führe nur an, daß 1899, p. 93 der Winkel als Akt der Drehung selbst erklärt wird. In Italien, wo die Methodik und die Philosophie der Elementargeometrie zur Zeit wohl in der höchsten Blüte steht — ich nenne nur *Peano, Enriques, Loria, Veronese, Ingrami, Sannia, d'Ovidio, Lazzeri* — hat sich seit 1896 ein analoger Verein unter dem Namen „Mathesis" gebildet, und es genügt für seine Bedeutung seinen ersten Präsidenten *Bettazzi* zu nennen und das Vereinsorgan, den „Periodico". Die älteste Vereinigung ist wohl die englische Association for the improvement of geometrical teaching (A. I. G. T.) von 1871, die unter dem Vorsitz von *Hirst*, unter dem Einfluß von *De Morgan* und ganz besonders *Sylvester* sofort gegen die bisherige ausschließliche Benutzung des Euklid in England Stellung nahm und von der der Auftrag ausging, einen Syllabus, einen neuen allgemein verbindlichen Normallehrplan, auszuarbeiten, der aber bis dato meines Wissens nicht zustande gekommen ist; wenigstens haben die „Elements of plane geometry" von 1889 keine autorative Geltung gefunden. Der Verein heißt neuerdings Mathematical Association.

Ins einzelne gehende Lehrbücher der elementarmathematischen Methodik kenne ich aus dem 19. Jahrhundert von *Wittstein*, *Dauge* (Gent), *Reidt* und *M. Simon*, man kann auch *Mager*, *H. Bertram*, *Duhamel*, *Hoüel* nennen. *Laisant*'s La mathématique, philosophie enseignement, Paris 1898, ist eigentlich mehr eine causerie des Verfassers als eine Anleitung zum Unterricht; ich bemerke, daß die Franzosen unter Philosophie der Mathematik etwas ganz anderes zu verstehen scheinen als die Deutschen und die Italiener. Den Gegensatz markieren am besten *Richard*'s Sur la philosophie des mathématiques, Paris 1903 und *H. Cohen's* tiefsinnige „Logik der reinen Erkenntnis", Berlin 1902. Wunderlich ist *Laisant*'s Ansicht über die Trigonometrie, die doch schon seit Nasir Eddin einen selbständigen Zweig der Mathematik gebildet hat.

Was in der Enzyklopädie von *Rein* über mathematische Methodik steht, ist des Erwähnens nicht wert; dagegen sind die (*Exner*'schen)

Instruktionen für die österreichischen Gymnasien von 1885 geradezu eine hervorragende Methodik; auch der sächsische Lehrplan von 1893 ist methodisch nicht unwichtig. Die neuen allgemeinen Lehrbücher der Pädagogik von *Schiller* und *Ziegler* sind, was Mathematik betrifft, dürftig. Speziell für amerikanische Verhältnisse berechnet sind die methodischen Anleitungen von *D. E. Smith* (1900) und *J. W. A. Young* (1904).

Weit wichtiger als die Bücher sind die Personen; Lehrer wie *Konrad Dasypodius*, *Sturm*, der Verfasser der Mathesis juvenilis, *Joachim Jungius*, *Klimm* in St. Afra, *Hohlfeld* in Leipzig, *Simon Ohm*, *E. E. Kummer*, *Schellbach*, *H. Bertram*, *Emil Lampe* sind lebendige Lehrbücher der Methodik. Und nicht minder ist der Einfluß der Wissenschaft und ihrer Vertreter, der Hochschullehrer. *Monge*, *Hachette*, *Legendre* und die ganze Schar der großen Lehrer der Ecole polytechnique, in neuerer Zeit: *Beltrami*, *A. Brill*, *Casey*, *Catalan*, *Cayley*, *Clebsch*, *Cremona*, *Darboux*, *Glaisher*, *Hoüel*, *F. Klein*, *Kummer*, *Loria*, *Mansion*, *Neuberg*, *Pasch*, *Petersen*, *Th. Reye*, *Riemann*, *Schur*, *Steiner*, *Sylvester*, *Taylor*, *Veronese* und so viele andere haben ganz direkt auf die Geometrie der Mittelschulen den größten Einfluß geübt. Nicht minder stark, wenn auch indirekt ist der Einfluß von *Gauß* — man denke nur an die nicht-euklidische Geometrie — und der von *Weierstraß*, der via *Georg Cantor*'s Mengenlehre zu der Arithmetisierung der Geometrie geführt hat.

Den größten Dank schuldet wenigstens die deutsche Schule *Baltzer*'s Elementen der Mathematik. *Baltzer* ist ganz besonders wertvoll durch die äußerst zuverlässigen literarhistorischen Angaben. Sehr beachtenswert ist auch die neue Enzyklopädie der Elementarmathematik von *Weber* und *Wellstein*.

Es läßt sich eine dreifache Bewegung im 19. Jahrhundert beobachten. Das Verlassen des dogmatischen Standpunktes zugunsten des genetischen im Zusammenhang mit der von *Monge* ausgehenden synthetischen Geometrie und damit das immer stärkere Hervortreten der Aufgaben und Konstruktionen, eine Strömung, die in *Herbart* ihre philosophische Begründung fand und vielfach dazu führte, *Euklid* als Lehrbuch zu verlassen. Von philosophischer Seite geht dann auch die immer stärkere Betonung der Anschauung in der Geometrie als eines selbständigen und wichtigen Faktors aus; sie geht auf *Rousseau*, *Kant* und *Pestalozzi* zurück, der, wie mir scheint, in *La Chacotais*' Education nationale von 1763 — einem Werke, das unter dem Einflusse von *Rousseau* steht — einen Vorläufer gehabt hat, wird von *Herbart* (A B C der Anschauung) mächtig gefördert und erreicht durch *Schopenhauer* ihren Höhepunkt: Beide Bewegungen gehen gelegentlich über ihr

Ziel hinaus, z. B. bei *G. Friedrich*, Die Aufgabe als Basis des geometrischen Unterrichts, Programm, Tilsit 1883. Der Unterricht zersplittert sich in Einzelheiten; die Schüler verlieren jeden Einblick in den Zusammenhang. Und Schriften wie das Nordhauser Programm von *Kosack* und die schwächliche Schrift *zur Nieden*'s verweigern der Logik den Tribut, der ihr gebührt.

Das Streben nach Anschauung führte auf den Gedanken, Stereometrie und Planimetrie (ähnlich wie Differential- und Integral-Rechnung) nicht mehr zu trennen im Anschluß an *Pestalozzi*, wofür ich *W. Fiedler* in Zürich, *Lazzeri* und *Gino Loria*, der selber *De Paolis* (1884) den Apostel dieser Idee nennt, anführe. Wissenschaftlich geht diese Idee auf *Monge* und *Poncelet* und *v. Staudt* zurück. Für den Unterricht hat die „Fusion", um mit *Loria* zu reden, zuerst *Gergonne*, Ann. 16, p. 209, gefordert und mit ihm *Crelle*; der erste durchgeführte Versuch stammt von *Mahistre*; das Referat von *L. Ripert* 1899, Enseignement 1, p. 63, gibt 1844 an, das ist aber die 2. Aufl.; weit schärfer durchgeführt ist der Versuch von *Méray* 1874. In Italien hat sich die Mathesis für die Fusion ausgesprochen (*G. Loria*, A few remarks on the „syllabus" of modern plane geometry, 1892, La fusione della planimetria con la stereometria, Periodico 15 [1900]). In Deutschland sind von *Holzmüller* Anläufe dazu genommen, die Nachahmung fanden, z. B. *Thieme* 1902, aber weit früher ist *Bretschneider* zu nennen (s. Lehrbücher) 1844.

Drittens wirkt die kritische Richtung, welche die Signatur der Mathesis des 19. Jahrhunderts ist, auf die Schulen ein und zeigt sich in der immer stärkeren Verbreitung der nicht-euklidischen Geometrie, sowie in der Kritik der Grundlagen; sie führt dazu, die Grundlagen möglichst unabhängig vom Parallelenaxiom zu gestalten, und führt so schließlich wieder auf *Euklid* zurück; ich nenne *Todhunter*, *Sannia*, *D'Ovidio*, *Faifofer* (Italien), *Max Simon* (Straßburg).

Aber auch dem Zeitgeiste kann sich die Schule nicht entziehen; die Gewalt der wirtschaftlichen Interessen verlangt greifbaren Nutzen; so dringt zunächst die darstellende Geometrie in die Schulen ein, und es erhebt sich das Verlangen, den Zeichenunterricht zu geometrisieren. Zu nennen sind: *W. Fiedler*, *A. Brill* und *H. Schotten*, auch *Laisant*. Dann aber greift die utilitaristische Strömung weiter; die Techniker an den Hochschulen verlangen, daß die Mathematiker die Beispiele aus der Praxis nehmen, und besonders der Verein zur Förderung etc. macht sich zum Träger dieser auf die Verwertung für die Praxis gerichteten Strömung, welche die Mathematik nicht mehr um ihrer selbst, sondern um ihres Nutzens willen, als Hilfswissenschaft, gelehrt wissen

will. — Für Frankreich vergleiche man z. B. *Laurent*, Considérations sur l'enseignement des mathématiques etc., L'Enseignem. 1 (1899), p. 38: „L'enseignement, celui des mathématiques en particulier, doit être *utilitaire.*" Den Höhepunkt bildeten die sogenannten *Richter*schen Leitsätze, welche 1892 in den Braunschweiger Beschlüssen des Vereins zur Förderung des Unterrichts bereits abgeschwächt erscheinen.

Am Schluß des Jahrhunderts wird die angewandte Mathematik unter dem Einflusse *F. Klein*'s, *Guido Hauck*'s und anderer Prüfungsgegenstand für die Lehramtskandidaten. Wem die Lehrpläne *Francke*'s in Halle und der Ritterakademien des 18. Jahrhunderts bekannt sind mit ihrer Feldmessung, Festungsbaukunst, Gnomonik etc., der wird das alte Wort *Akiba*'s, daß es nichts Neues unter der Sonne gibt, wieder einmal bestätigt finden.

A. Allgemeines.

L. N. Carnot, De la corrélation, Paris 1801 (Einleitung).

J. F. Herbart, A B C der Anschauung, Göttingen 1802, verlangt, daß der Beweis den Grund des Satzes angibt. (*Aristoteles.*)

Bernhard Bolzano, Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie, Prag 1804, ein Versuch im Gegensatz zu *Kant,* dessen Auffassung der Geometrie von der heutigen mehr in der Sprache als in der Sache abweicht (*H. Cohen*, Logik der reinen Erkenntnis, Berlin 1908), die Geometrie rein logisch zu begründen. *Bolzano* selbst erklärt schließlich den Versuch als mißlungen, nimmt ihn aber später wieder auf: Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik, Prag 1810.

J. H. Pestalozzi, A B C der Anschauung, Zürich 1803.

J. M. Hoene Wronski, *Introduction à la métaphysique des mathématiques,* Paris 1810. Nach *Wronski* hat

A. de Montferrier eine vierbändige Enzyklopädie verfaßt, deren II, 4 Elementargeometrie ist, Paris 1856—59.

H. F. Bernhardi, Mathematik und Sprache, Gegensatz und Ergänzung, Programm Berlin 1815.

Bernhardi ist ein überzeugter Anhänger *Pestalozzi*'s.

G. S. Ohm (der Physiker), Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheren Bildungsmittels, Erlangen 1817. (15 Bogen, sein Erstlingswerk, fordert die heuristische Methode.)

C. F. Haubert, Scholae logicae-mathematicae, Reutlingen 1829.

Karl W. Mager, Wissenschaft der Mathematik nach heuristisch-genetischer Methode, Berlin 1837, mit einer selbständigen Einleitung über die Methode der Mathematik als Lehrobjekt und Wissenschaft, stark von *Herbart* beeinflußt; *Mager* fordert wie *Herbart,* daß der Beweis Einsicht in den Seinsgrund des Satzes gewähre.

M. W. Drobisch, Philologie und Mathematik als Gegenstände des Gymnasialunterrichts betrachtet. Leipzig 1832. *Drobisch* hat sich in seiner langen Lehrtätigkeit große Verdienste um die Ausbildung der sächsischen Gymnasiallehrer erworben.

Ch. F. Pfleiderer, Scholien zu *Euklid's* Elementen, Heft I—V, Stuttgart 1826 und 27, ein äußerst fleißiges, erklärendes und literarhistorisches Sammelwerk.

S. F. Lacroix, Essai sur l'enseignement, Paris I. Aufl. 1798. Die *Lacroix*'schen Lehrbücher, welche über fast alle Teile der Mathematik handeln, haben in immer wiederholten Bearbeitungen und Übersetzungen in Frankreich, Italien, Deutschland, Holland, Spanien usw. sehr große Verbreitung gefunden und finden sie zum Teil noch heute; sie zeichnen sich durch französische Vorzüge, Klarheit der Sprache, logisch einfache Verknüpfung und Reichhaltigkeit aus, doch vermeiden sie tieferes Eingehen auf die Philosophie der Mathematik.

A. De Morgan, Connexion of numbers and magnitude, London 1836; *On the study of mathematics,* 1828, 5. Nov. Antrittsrede, 1828; *On the study and difficulties of mathematics,* 2 Teile, 27 p. 1830—31.

L. A. Kunze, Lehrbuch der Geometrie, Jena 1842, 2. Aufl. 1851, ein methodisch äußerst wertvolles und sehr reichhaltiges Buch.

G. Faure, Mémoire sur la réforme de l'enseignement de la géométrie, Paris 1846.

Rob. Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung, Programm Nordhausen a. H. 1852, direkt durch *Schopenhauer* veranlaßt, das Gegenstück zu *Bernh. Bolzano*'s Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie, Prag 1804. Das Programm ist in Nordhausen selbst nur noch in einem Exemplar vorhanden, ein Neudruck wäre angezeigt.

Paul Serret, Des méthodes en géométrie, Paris 1855, allerdings mehr Methoden als Methodik, aber für Lehrer bildend.

J. Delboeuf, Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solutions des postulats, Liége (Lüttich) 1860.

Fr. Bartholomaei, 10 Vorlesungen über Philosophie der Mathematik, Jena 1860, ein Buch, aus dem Referent sehr viel Anregung erhalten hat.

J. Hoüel, Essai d'une exposition rationelle des principes de la géométrie, Arch. Math. Phys. (1) 40 (1863), p. 171; vollständiger: 1867 Paris; *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire,* Paris 1867, 2. edit. 1885; Über die Rolle der Erfahrung in den exakten Wissenschaften, Arch. Math. Phys. (1) 59 (1876), p. 63, Übersetzung eines 1875 gehaltenen Vortrags; *Considérations élémentaires sur la généralisation de l'idée de quantité,* Paris 1883. *Hoüel* ist einer der verdienstvollsten Methodiker, der besonders die Gedanken der *Bolyai, Lobatschefskij, Bellavitis* usw. den Franzosen, Italienern und Deutschen zugänglich gemacht hat.

A. A. Cournot, Des institutions d'instruction publique en France, Paris 1864.

J. M. C. Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 5 Bände, Paris 1865—73; der zweite Band ist der speziell mathematische; ein hochbedeutendes Werk; vgl. auch seine Differentialrechnung.

K. H. Schellbach, Über den Inhalt und die Bedeutung des mathematischen und physikalischen Unterrichts auf unsern Gymnasien, Programm Berlin 1866; Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien, Berlin 1887, das Abschiedswort des „alten *Schellbach*". *Schellbach* ist als langjähriger Leiter des mathematisch-pädagogischen Seminars in Berlin *der Reformator* des deutschen mathematischen Unterrichts gewesen, der, von einzelnen Ausnahmen abgesehen, bis etwa 1860 auf sehr niedriger Stufe stand. Aus seiner Schule sind u. a. *Clebsch, H. Bertram, Mehler, Quidde, E. Lampe, F. Müller* hervorgegangen, auch *G. Cantor*

und *H. A. Schwarz* waren eine Zeitlang Mitglieder des Seminars. Vgl. über ihn *F. Müller*, Gedächtnisrede 29. Okt. 1892; Zeitschr. math. Unterr. 23, *Baumeister*'s Handbuch etc. IX, p. 13. München 1895.

J. Todhunter, nebst *De Morgan* vielleicht Englands *bedeutendster Methodiker* (s. Lehrbücher), The conflict of studies and other essays, London 1873 s. Lehrbücher.

Julius Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben, Kopenhagen, dänisch 1866, deutsch 1879.

J. Hoüel, L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie, Battaglini 1870, Nouv. annal. 1869, p. 278.

G. Korneck, Über mathematischen Unterricht, Programm Kempen 1870.

A. Sannia e d'Ovidio, Elementi di geometria, Neapel, 1. Aufl. 1869, 2. Aufl. 1871 (Die Lehre von den Proportionen), Aufsatz dazu von *d'Ovidio* im Giorn. di Matematiche 9, p. 122.

Z. G. de Galdeano, Estud. critic. sobra la generac. de los concept. mat., Madrid 1870.

P. Mansion, Sur le premier livre de la géométrie de Legendre, Revue de l'instruction publique 13 (1871), p. 317; energische Verwerfung des Lehrgangs *Legendre*'s. *Mansion und sein Kollege Neuberg* sorgen seit vielen Jahren für eine gründliche (auch historische) wissenschaftliche Ausbildung der belgischen höheren Lehrer.

J. C. Becker, Lehrbuch der Geometrie, Schaffhausen 1872; nachdem er 1870 die *Abhandlungen aus dem Grenzgebiet der Mathematik und Philosophie* geschrieben hatte (Zürich), Zeitschr. math. Unterr. 4, p. 129 (1873), Brief an den Herausgeber; *Die Grundlagen der Geometrie*, Zeitschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 445. *J. C. Becker ist ein sehr zu beachtender Methodiker* auf Kantischer Grundlage.

J. C. V. Hoffmann, der Begründer der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Die Prinzipien des ersten Buches von *Euklid*'s Elementen, Zeitschr. math. Unterr. 3 (1872), p. 14; *Müller*, offener Brief, darüber, ebenda, p. 370.

P. Freyer, Beispiele aus der Mathematik zur Logik, Programm Ilfeld 1872, Neudruck 1887; methodisch *wertvoll*.

F. Studnička, Einige Bemerkungen über den Geist in der Mathematik, *Časop.* II, (1873), p. 57; die Übersetzung im Jahrbuch scheint mir nicht glücklich, es soll wohl statt „Geist" heißen „psychische Arbeit". Fortsetzung *Časop.* VIII, (1879), p. 85 (handelt von den Beweisen in der Theorie der Determinanten).

C. Stumpf, Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung, Leipzig, 1873. Trotzdem *Stumpf* Philosoph ist, ist sein Werk meines Erachtens ein sehr wertvoller Beitrag für die Bildung des mathematischen Lehrers.

G. Bellavitis, Lehrplan für die Planimetrie, Mem. venet. 17, (1873), p. 227.

G. de Galdeano, Observaciones útiles para el estudio de las Matemáticas. El método aplicado á la ciencia matemática 1875; Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales, 1877; philosophisch und pädagogisch.

G. de Galdeano, Ciencia, educación y enseñanza. Zaragoza, 1899.

G. de Galdeano, Estudios de crítica y pedagogía matemáticas. Zaragoza, 1900.

J. M. Couceiro da Costa, Filosofia de las Matematicas y reflexiones pedago-

gicas sobre la enseñanza de esta asignatura 1875 (Abriß der Matho-Philosophie *Hoene Wronski*'s), portugiesisch.

V. Valeriani, Anwendung der Induktion, Giorn. di Mat. 15 (1877) p. 34 (an *Carnot*'s Corrélation anknüpfend).

Guido Hauck, Stellung der neueren Geometrie zur *Euklid*ischen, Württemb. Korrespondenzbl. für Gelehrte- und Realschulen 24 (1877).

W. Fiedler, Zur Reform des geometrischen Unterrichts, Zür. Naturf. Ges. 22 (1877), fordert, daß neuere und darstellende Geometrie von vornherein berücksichtigt und dabei Stereometrie und Planimetrie verbunden werde (italienisch, mit drei ungedruckten Briefen, Giorn. di Mat. 16 (1878), p. 243); *Über die Symmetrie,* Zür. Naturf. Ges. 21 (1876), p. 50.

P. Mansion, Note sur l'enseignement des mathématiques dans les collèges, Brux. Soc. sc. I A, p. 160; für Propädeutik bis zum 15. Jahre.

Börner, Geometrische Propädeutik Pr. Ruhrort 1876 (berührt sich mit *Holzmüller*). Die Frage nach geometrischer Propädeutik beschäftigt die Direktorenkonferenzen in Deutschland seit 1870 sehr stark und wird ebenso oft bejaht wie verneint. Der sächsische Lehrplan sieht von Systematik in der Quarta ab, d. h. er fordert diejenige Strenge, für die der Quartaner reif ist. Vgl. dazu *Max Simon* Brief an *F. Klein.* Deutsche Math.-Ver. 1904.

Max Simon und *H. Lorberg,* Referate über den Unterricht in Rechnen und Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen des Reichslandes, Straßburger Direktorenkonferenz von 1877, auf Veranlassung des Begründers des deutschen höheren Schulwesens im Elsaß *August Baumeister.*

Th. Muir, On scientific mathematics, Quart. Journ. 7 (1877), p. 476.

A. Ziegel, Methodik und Lehrplan usw., Programm Schwerin 1878.

Th. Wittstein, Methodik des mathematischen Unterrichts, Hannover 1879.

L. Houtain, Quelques réflexions sur l'enseignement supérieur, Mém. de Liége (2) 6, 1878; Klassifikation der gesammten Mathematik (ein Versuch wie ihn *E. Papperitz* auf dem Kongreß zu Halle 1894 gemacht hat).

J. K. Becker, Zur Reform des geometrischen Unterrichts, Programm Wertheim a. M. 1880; *Die Mathematik* als Lehrgegenstand der Gymnasien Berlin 1883; Verteidigung seiner *Elemente der Geometrie auf neuerer Grundlage* (*Riemann, Helmholtz*) Berlin 1877.

G. Veronese, Sulla riforma d'insegnamento geometrico, Giorn. di mat. 13 (1878), p. 251 (neuere Geometrie selbständig).

J. M. Hoene-Wronski, Einleitung in den mathematischen Unterricht (polnisch) von *Niedzwieck* herausgegeben 1880. *Wronski* verdiente auch in Deutschland Beachtung; eine Parallele mit *Scheffler* wäre nicht uninteressant.

Guido Hauck, Die Stellung der Mathematik zur Kunst und Kunstwissenschaft, Festrede für *Schinkel,* Berlin 1880 (Preuß. Jahrb. 46); seit *Maupertuis* 1743 der erste nachdrückliche Hinweis auf das künstlerische Element in der Mathematik; vgl. auch die Kaiserrede von *Emil Lampe,* Berlin 1893. Hierher gehört auch der Vortrag von *F. Rudio,* Über den Anteil der mathematischen Wissenschaft an der Kultur der Renaissance, Hamburg 1891, und

J. Engel, Der Geschmack in der neueren Mathematik, Festrede Leipzig 1890.

H. Bertram, Artikel Mathematik in der 2. Aufl. von *Schmidt*'s Enzyklopädie 4. Band, Gotha 1881, Die Ansichten *Bertram*'s, dessen Lehrerfolg so ziemlich einzig in Deutschland dastand, in gedrängter Kürze wiedergebend.

A. Weilenmann, Der geometrische Unterricht in Mittelschulen, Programm

Zürich 1881 (vom Standpunkte des Kunstwerts); Fusion der Planimetrie und Stereometrie (*Fiedler*).

A. Pieper, Eine neue Methode des mathematischen Unterrichts, Zeitschr. math. Unterr. 14 (1883), p. 60. Häusliche Arbeiten sollen wegfallen; Lehrstunden wechseln mit Extemporalien, bei denen *jeder* Schüler *eigne* Aufgaben erhält (!).

S. Günther, Das geschichtliche Element beim mathematischen Unterricht, Zeitschrift Gymnasium I, 9 und 10, 1883. *Günther* war in Deutschland nach *Baltzer* so ziemlich der erste, der die Bedeutung der Geschichte für den Unterricht erkannt und begründet hat; Nachfolger hat er in *Max Simon* gefunden und in *P. Treutlein*, Das geschichtliche Element im Unterricht der höheren Lehranstalten, D. Naturf. u. Ä. Heidelberg 1888. In Italien ist *Loria* Vorkämpfer, in Belgien *Mansion*.

R. de Paolis, Elementi di geometria, Torino 1884 (für Lehrer). Fusion der Planimetrie und Stereometrie.

Österreich. Instructionen für Gymnasien (*Exner*) von 1885, ein Werk, an das keine andere offizielle Kundgebung heranreicht.

F. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen, Berlin 1886. Ein verdienstliches Werk, aber ohne tieferes Eindringen in den Geist der Mathematik und das Wesen ihrer Methodik; Zusammenstellung der Verordnungen, Pläne, Lehrbücher usw.

J. Hermes, Lehrplan für das Realgymnasium, Programm Osnabrück 1886, sehr beachtenswerte Verteilung des Lehrstoffes.

A. J. G. Barclay, On the teaching of elementary geometry, Edinburgh Proceed. II, 24, 1886, *Thesen*.

F. Dauge, Leçons de méthodologie mathématique, Gent 1883; Bericht von *Mansion* Mathesis 3 (1883), p. 149. Danach keine zusammenhängende Methodik, sondern Behandlung einzelner schwieriger Punkte. 2. Aufl. 1896.

R. Bettazzi, I postulati e gli enti geometrici, Besso Periodico I, p. 170, 1886. Die Schrift zeigt, wie tief um diese Zeit schon die von *Gauß*, *Lobatschefskij*, *Bolyai*, *Riemann*, *Beltrami* usw. ausgehende Kritik der Grundlagen in Italien eingedrungen ist.

O. Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene Leipzig 1887. Das Werk hält, was es verspricht. Die Elementargeometrie ist im höchsten Maße systematisch und kritisch behandelt. Es ist für die Lehrer bestimmt, und seine Kenntnis sollte gefordert werden.

L. Huebner, Ebene und räumliche Geometrie des Maßes, Leipzig 1888, 2. wohlfeile Ausg. 1895; ein interessanter Versuch, das Verhältnis zwischen Geometrie und Trigonometrie umzukehren.

E. Lundberg, Bericht über seine Reise nach Frankreich und Deutschland (schwedisch), Stockholm 1889, wichtig für schwedische Mittelschulen.

W. Fuhrmann, Synthetische Beweise planimetrischer Sätze, Berlin 1890.

H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts I, Leipzig 1890, Einleitung über die *Reformbestrebungen* auf dem Gebiete des *planimetrischen Unterrichts, reich an literarhistorischen Zitaten.*

Max Simon, Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie, Straßburg 1890. So ziemlich das erste deutsche Werk, das die absolute (hyperbolische) Geometrie von vornherein berücksichtigt.

C. Schwering, Aufgabe und Anschauung besonders in der Stereometrie, Pro-

gramm Coesfeld 1889; vgl. auch: Vortrag in der mathematischen Sektion der Philologenversammlung von 1901 zu Straßburg.

Alex. Brill, Über die Schulreform und den Unterricht in Mathematik und Zeichnen auf den Gymnasien, Tübingen 1890.

Friedrich Meyer, Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Stadtgymnasiums zu Halle a. S., Programm 230 (1891), eine der bedeutendsten Schriften der deutschen mathematisch-pädagogischen Literatur.

B. Kerry, System einer Theorie der *Grenzbegriffe,* Leipzig und Wien 1890, ein Buch, dessen Kenntnis von jedem Lehrer *verlangt* werden müßte, wie auch desselben Verfassers Aufsätze „Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung", Zeitschr. f. wiss. Philos.

H. Schotten, Inhalt und Methode usw. 2. T. (1893), (schwächer).

G. Veronese, Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare, Padova 1891, deutsch von *Schepp* Leipzig 1894, ein viel umstrittenes gedankenreiches Werk.

C. Segre, Su alcuni indirizzi nelle investigazione geometriche, Riv. di Mat. 1 (1891), p. 42.

G. Peano, Osservazione, Riv. di Mat. 1 (1891), p. 66.

S. Catania, Del insegnamento della matematica nei ginnasii e nei licei, Riv. di Mat. 5, (1895), p. 33.

Max Simon, Kritik des neuen preußischen Lehrplans, Zeitschrift für Gymnasialwesen 47 (1893), p. 593.

Gino Loria, Della varia fortuna di *Euclide* etc., Periodico 8 (1893), p. 81, auch selbständig Roma 1893, ein ganz vorzüglicher Überblick.

J. Versluys, Beknopte etc., d. h. die kurz gefaßte Geschichte des Unterrichts und der Erziehung (holländisch) 1891.

F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, Leipzig 1895. *Klein* hat das Verdienst, die Hochschullehrer der Mathematik nachdrücklich auf die Bedeutung einer wissenschaftlichen Elementargeometrie als Vorlesungsgegenstand hingewiesen zu haben; er hat in Verbindung mit *G. Hauck* der vom Zeitgeist geforderten angewandten Mathematik in der Schule Bahn gebrochen; vgl. auch *F. Klein* und *E. Riecke,* Über angewandte Mathematik und Physik etc., Leipzig 1901.

Max Simon, Rechnen und Mathematik in *Baumeister*'s Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen; darin einleitend eine historische Übersicht der Entwicklung des mathematischen Unterrichts in Deutschland seit der Renaissance, München 1895, wozu zu vergleichen ist

Osw. Beier, Die Mathematik im Unterricht der höheren Schulen von der Reformation bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts, Programm Crimmitschau 1879. Das Programm von

C. Heym, Leipzig 1873, ist im wesentlichen eine Geschichte des mathematischen Unterrichts an der Thomasschule.

R. Most, Über den Bildungswert der Mathematik, Programm Koblenz 1895.

H. Thieme, Der Bildungswert der Mathematik, Pädag. Arch. 6 (1897); es sei dabei auch eine Schrift von *K. Gneiße,* Über den Bildungsunwert der Mathematik, Straßburg 1898 erwähnt.

G. Veronese, Elementi della geometria, Padova 1897. Die Würdigung dieses exzeptionellen Werkes bei *F. Schur,* Math. Ann. 55 (1901), p. 266, Fußnote, und *Thieme,* Die Umgestaltung der Elementargeometrie, Programm 175, 1900.

G. Ingrami, Elementi della geometria per le scuole secondarie, Bologna 1899, auf gleicher Höhe wie das vorige Werk.

F. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900, art. 1; aber das ganze Werk verdient im höchsten Grade die Beachtung der Lehrerwelt. Eine deutsche Ausgabe durch *H. Fleischer* ist in Vorbereitung.

B. Spezielle Methodik.*)

G. Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818; Réimpression facsimile, Paris 1903.

Das sogenannte *Drobisch*sche auch *Möbius*sche Prinzip, durch das die Umkehrungen erledigt werden, schon von

F. C. Hauber, Scholae logico-mathematicae, Reutlingen 1829.

(*S. Günther*, Über eine Anwendung und Erweiterung des *Hauber*schen Theorems, Arch. Math. Phys 56 (1874) p. 26.)

Chr. H. Nagel, Geometrische Analysis (Konstruktionsaufgaben), Ulm 1850; vgl. sein *Referat* in *Schmidt*'s Enzyklopädie (1. Aufl.).

D. Besso, Del concetto di funzione nell' insegnamento della geometria elementare, Giorn. di Mat. 7 (1869), p. 431; in Deutschland *Max Simon* 1884. Elemente der Arithmetik, in neuester Zeit nach *F. Klein*.

R. Sturm, Die neuere Geometrie auf der Schule, Zeitschr. math. Unterr. 1 (1870), p. 474.

F. C. Fresenius, Lehre von der Kongruenz der Dreiecke usw., Zeitschr. math. Unterr. 2 (1871), p. 1; Über die unendlich fernen Gebilde, ebenda p. 494. *R. Sturm*, über dasselbe, ebenda p. 391. *V. Schlegel*, *Becker*, über dasselbe, ebenda 3, p. 155. *V. Schlegel*, Proben usw. (*Graßmann*sche Ausdehnungslehre auf Elementargeometrie angewandt), ebenda 2, p. 308; dasselbe, ebenda 4, p. 81.

Hubert Müller, Schulgemäße Behandlung der Symmetrielehre, Zeitschr. math. Unterr. 6 (1875). *Hubert Müller* ist einer der ersten, der in Deutschland die Symmetrie zur Beschleunigung und Vereinfachung des Lehrgangs in der Planimetrie benutzt hat, vgl. sein Lehrbuch (lange vor ihm in Frankreich *H. Vincent* 1827 und später *G. Dostor*). *W. Erler*, Kleinigkeiten aus der Schulstube, ebenda 4; Über Ungleichheiten, ebenda 9, p. 261, 341.

O. Schlömilch, Über Ungleichheiten und deren geometrische Anwendung, ebenda 15. *Friedrich Meyer*, Über die Behandlung planimetrischer Aufgaben durch die Schüler, ebenda 16. *W. Krumme*, Analysis des Beweises, ebenda, p. 347; vgl. auch seine Vorrede zu dem Lehrbuch von *H. Fenkner* 1888.

J. Cockle, On the sign of equality, Messenger (2) 4, 1874, p. 11. *Cockle* ist einer der ersten, der auf die verschiedene Bedeutung des Gleichheitszeichens aufmerksam gemacht hat. Über die Bedeutung des Zeichens vergleiche die geistvolle Rektoratsrede von *Ernst Schröder*: Über das Zeichen, Karlsruhe 1890.

K. Rudel, Planimetrie und Stereometrie, Bayrische Blätter 11 (1875), p. 120.

F. Reidt, Über einige Auflösungsmethoden der ebenen Trigonometrie, Zeitschr. math. Unterr. 3 (1872), p. 141, dazu:

J. Hoüel, ebenda 3, p. 377, ebenda 4, p. 335, ebenda 7, p. 335.

Guido Hauck, ebenda 8, p. 7, wie vorher *Reidt* zur Frage über das geome-

*) Siehe vielfach auch die einzelnen Disziplinen.

trische und das analytische Prinzip beim Unterricht, betont stark das analytische Prinzip.

J. Hoüel, Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie, Giorn. di Mat. 13 (1875), p. 72 (gegen Hilfswinkel, für Tafeln der trigonometrischen Funktionen *selbst,* sofortige allgemeine Definition). Ihm schließt sich

D. Besso, Period. 2 (1887), p. 41, wesentlich an wie auch Referent. *Tafeln der trigonometrischen Funktionen selber von Minute zu Minute sind für die Schüler dringend nötig.*

Ich lenke die Aufmerksamkeit der Lehrer auf:

Franz Meyer, Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik, D. Math. V. 7 (1899), p. 147, besonders für Repetition in der Prima geeignet.

R. v. Fischer-Benzon (*Petersen*-Übersetzer), Die geometrischen Konstruktionsaufgaben, Programm Kiel 1884. *E. Lampe* wendet sich mit Recht im Jahrbuch gegen die Übertreibung der Konstruktionsaufgaben.

E. F. Barth, Die geometrischen Konstruktionsaufgaben usw., 5. Aufl. 1884.

Gustav Hoffmann, Anleitung zur Lösung planimetrischer Konstruktionen. 1885 (*Petersen*).

K. Rudel, Die Verwendung der Symmetrie usw., Nürnberg 1889, (Anregung von *Fiedler*) an *Beispielen* aus der *Stereometrie* und Maximumsaufgaben durchgeführt.

D. Fellini, La risoluzione completa di problemi, Period. 8 (1893), p. 150 (vollständige Erörterung der Resultate).

E. Lemoine, La géométrographie ou l'art de construction géométrique, Assoc. franç. 21 (1892), p. 36; vorher Congrès d'Oran 1888, Bourget III, 1889, p. 10—38. Ich bemerke, daß, seit *Steiner* in den „Konstruktionen" von 1832 die Aufmerksamkeit auf die „Ökonomie der Konstruktionen" gelenkt hat, *Schellbach* und seine Schule und, ich glaube, die besseren Lehrer der ganzen Welt diese Seite der Methodik stets berücksichtigt haben. Die *Lemoine*sche Messung der Einfachheit ist ganz willkürlich und entbehrt der physiologischen Grundlage, die die *Pédagogique scientifique Binet's* erst liefern muß.

H. Müller, Stereometrische Konstruktionen, Projektionslehre für die Prima des Gymnasiums, Programm Frankfurt a. M. 1893.

Paul Mannheim, Remarques sur les constructions géométriques, Messeng. 27 (1897), p. 8 (man soll mehrere Konstruktionen für dieselbe Aufgabe haben).

Georg Degenhardt, Praktische Geometrie auf dem Gymnasium, Programm Frankfurt a. M. 1896 (Einfluß *F. Klein*'s.)

Ernst Fiedler, Die darstellende Geometrie im mathematischen Unterricht, Programm Zürich 1898.

E. Papperitz, Über die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie, Rede 1901; und ausnahmsweise ihrer Bedeutung wegen auch für die Schule erwähne ich

Jos. Wellstein, Über das Studium der angewandten Mathematik, Vortrag im math. naturw. Studentenverein, Straßburg 1902, und

P. Stäckel, Über die Entwickelung des Unterrichtsbetriebes in der angewandten Mathematik an den deutschen Universitäten, D. Math. V. 1902. Ebendort sind auch die Gutachten von *F. Klein* und *G. Hauck* für die preußische Schulkonferenz von 1900 abgedruckt.

Als letztes Wort des italienischen Vorkämpfers für die Verschmelzung der Planimetrie mit der Stereometrie:

G. Loria, La fusione della planimetria con la stereometria, Periodico Teil XV, p. 1, 1899.

Vgl. zu diesem Artikel noch den folgenden. Es müssen aber an dieser Stelle ganz besonders hervorgehoben werden:

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, und

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 2. Aufl. 1903, da sie namentlich für die Lehre von der Kongruenz und die Parallelentheorie und überhaupt für die Methodik des Schulunterrichts, obwohl eigentlich nicht elementar, von bedeutendem Einflusse sind.

4. Lehrbücher, Aufgabensammlungen. Die geschilderten Strömungen zeigen sich auch in den Lehrbüchern. Die Variabilität der Elementargeometrie tritt vielleicht am schärfsten in dem Unterschiede zwischen dem ursprünglichen *Legendre* und seinen Bearbeitern *Blanchet* und *Cambier* hervor, in Deutschland etwa im Vergleich zwischen *Thibaut*'s Grundriß und den Lehrbüchern von *Henrici-Treutlein* oder *W. Pflieger*, in Italien zwischen *Tegoli* und *Enriques-Amaldi*. *Legendre* wird in Frankreich gerade so Autorität wie vorher *Euklid*, und Angaben wie livre III, proposition VI beziehen sich dort gerade so auf *Legendre*, wie in England auf *Euklid*. Der Einfluß, den *Legendre* ausübt, erstreckt sich außer auf die romanischen Völker und die Niederlande auch auf Deutschland, wie man deutlich sieht, wenn man z. B. *Thibaut*'s Grundriß von 1801 mit der Ausgabe von 1809 vergleicht; man sehe auch *J. Knar*, Anfangsgründe der reinen Geometrie, Graz 1829. Es entstehen in Deutschland tüchtige Arbeiten, etwas schwerfällig aber gründlich: *Hauber*, *Hauf*, *Knar*, *Lehmus*, *Bretschneider*, *Grunert* usw. Die Fehler des *Legendre* werden zwar in Deutschland wie in Frankreich bemerkt und zu verbessern versucht; die Definition der Geraden als kürzeste Linie, die Behandlung der Parallelentheorie (s. dort), die Lehre von den Proportionen und der Inkommensurabilität (*Francoeur*), die Definition der Ähnlichkeit der Vielecke, welche überbestimmt ist, wird von *Blanchet* und *Catalan* verbessert, ebenso seine Symmetrielehre; aber die ganze arithmetische Richtung breitet sich doch mächtig aus.

Dann macht sich der Aufschwung der Geometrie in Frankreich durch *Monge*, *Hachette*, *Dupin*, *Poncelet* usw. geltend; es entstehen eine Menge von Bearbeitungen der neueren Geometrie, die nach und nach in die Lehrbücher eindringen; ich nenne *Kunze*'s Lehrbuch von 1842 und *Cirodde* aus gleicher Zeit, und wieder gehen von Frankreich die

„Manuels“, die kurzen, für die Examina bestimmten Leitfäden usw. aus, wie: *Terquem*, *Catalan*, usw., wie dann in Deutschland um die Mitte des Jahrhunderts die *Kambly*, *Mehler* usw. entstehen. Der Umschlag in der Methode, wie er in Deutschland durch *Herbart* kodifiziert wird, der wenigstens theoretisch das Märchen von der besonderen mathematischen Begabung beseitigte, macht sich in einer Reihe von Büchern geltend, die ausdrücklich die „heuristische“ oder „genetische“ Mathematik auf ihren Titel schreiben.

Die so vernünftigen Gedanken *Herbart*'s führten dann allerdings unter dem Einflusse von Nachtretern wie *Stoy* und Konsorten dahin, daß jedem wissenschaftlichen Lehrer förmlich übel wurde, wenn er nur die Worte „Formalstufen, konzentrische Kreise, Darbietung“ usw. hörte. Aber dieser Unfug hat hauptsächlich die preußischen Lehrpläne von 1892 verschuldet, die eine wahre Flut von Lehrbüchern teils schlechten, teils verschlechterten, hervorriefen. Die abfälligen Kritiken, von denen die des Referenten besonders deutlich war, haben freilich bald zu einer erheblichen Verbesserung geführt.

Von 1860 an etwa machte sich der Einfluß von *Gauß*, *Wolfgang* und *Johann Bolyai*, *Riemann*, *Beltrami*, *Hoüel*, *De Tilly* geltend; es entstehen Bücher wie die von *Gallenkamp*, *Worpitzky* in Deutschland, *Betti* und *Brioschi*, *Sannia* und *D'Ovidio* in Italien, *Catalan*, *Rouché* und *De Comberousse* in Frankreich, die einen naturgemäßen Aufbau mit wachsendem Reichtum des Inhalts verbinden. Es kommen dann Bücher wie *Friedrich Meyer*'s dritter Kursus seiner Bearbeitung der *Wiegand*schen Bücher, *Henrici* und *Treutlein*, und das Jahrhundert, das mit einer förmlichen Revolte gegen *Euklid* begonnen, schließt mit Büchern wie die von *Veronese* und *Ingrami*, die, wenn sie auch inhaltlich von *Euklid* abweichen, doch dem Plane nach im Grunde völlig auf *Euklidischer* Grundlage stehen; denn sie legen den Hauptwert auf Strenge der Definition und systematische Verknüpfung der Sätze.

Eine eigentümliche Beobachtung ist noch für Deutschland zu registrieren: Ungründliche Bücher wie die von *Lübsen*, geschickte aber unwissenschaftliche wie die von *Kambly*, finden eine ungeheure Verbreitung; das Buch von *Kambly* war 1880 nach dem Bericht der preußischen Unterrichtsverwaltung in 217 Anstalten eingeführt; ernste Arbeiten wie die von *Gallenkamp*, *Worpitzky*, *Hub. Müller*, ja selbst *Henrici* und *Treutlein* bringen es selten zu mehr als zwei Auflagen. Der Grund dieser Erscheinung ist, daß in Deutschland bis vor kurzem dem Lehrer der Mathematik die für ihn so absolut nötige Lehrfreiheit gelassen war; und *Kambly* und *Mehler* lassen der Individualität des

Lehrers einen viel weiteren Spielraum als z. B. *Henrici* und *Treutlein* oder das neue Buch *W. Pflieger*'s.

In Frankreich ist die Schule viel früher reglementiert worden, und dort ist die umgekehrte Bewegung eingetreten. Unter Napoleon III. rühmt sich der Unterrichtsminister, daß zur bestimmten Stunde des bestimmten Tages das bestimmte Kapitel des *Cäsar*, der festgesetzte Satz des *Legendre* durchgenommen würde. Seit 1870 geht eine entschiedene Strömung dahin, die Lehrer zu entfesseln; vgl. auch *Laisant* „Philosophie usw.“.

In Deutschland, speziell in Preußen scheint dagegen der *Napoleonische* Lehrautomat zur Zeit das Ideal zu sein. Ich wiederhole hier die Worte aus meiner Methodik: „In dem Maße wie der Bureaukratismus in die Gymnasien eindrang, ist der Geist daraus entwichen.“

Eigentümlich ist das Verhalten der Engländer. Die große Zähigkeit, mit der sie an ihren Gewohnheiten festhalten, verbunden mit ihrem Prüfungswesen, das ein bestimmtes Verzeichnis der verlangten Sätze, einen „Syllabus“ fordert, hat sie äußerlich an *Euklid* festhalten lassen; sieht man jedoch näher zu, so gibt es so viele Ergänzungen, z. B. 1840 *Coofey*, Noten, „Sequels“ usw., daß tatsächlich derselbe Lehrstoff wie im *Rouché* sich auch bei *Casey* und *Nixon* und *Tailor* findet. Ähnlich ist es in Amerika, nur daß dort auch äußerlich nicht an *Euklid* festgehalten wird.

In Italien ist nach dem Berichte des Herrn *Loria* die Entwicklung ähnlich wie in Deutschland, und Italien kann sich zur Zeit der tiefsinnigsten für die Schule bestimmten Lehrbücher rühmen: *Lazzeri*, *Veronese*, *Ingrami*, *Enriques*. Von *Loria* existiert eine ausgezeichnete Übersicht unter dem Titel: Della varia fortuna di *Euclide* in relazione con i problemi dell' insegnamento di geometria elementare, Roma 1893.

Noch eine Bemerkung: Meine Wertung der Lehrbücher, besonders der ausgezeichneten neuesten italienischen hat mit der der Lehrmethode nichts zu tun. Der Lehrer kann gar nicht scharf genug von dem Lehrbuch getrennt werden. Für die Quarta, d. h. für Knaben zwischen 11 und 12 Jahren, halte ich noch immer (vgl. auch *Laisant*, Philosophie usw.) ein Lehrbuch geradezu für ein Verbrechen. Man kann — ich bin selbst ein Beispiel dafür — ganz ohne Lehrbuch und selbstverständlich auch ohne Diktat auskommen; eine Logarithmentafel ist das einzige, absolut notwendige Hilfsbuch, das die Schüler in Händen haben müssen. Der Lehrer wird, soweit es irgend möglich ist, die Sätze so genetisch vortragen, daß der Schüler sie selbständig zu finden glaubt. Das Lehrbuch dagegen muß dogmatisch sein. Der Schüler braucht höchstens an großen Anstalten, wo der Lehrer im Unterricht

wechselt, einen Leitfaden; der Lehrer aber hat die Pflicht, mit der Literatur der Lehrbücher und Aufgabensammlungen möglichst vertraut sein.

Ich beginne mit *Frankreich* und bemerke, daß dort außer den staatlichen „Lyceen", deren es in jedem Département eines gibt, auch Collèges bestehen, die meistens Privatanstalten, wenn auch vielfach mit städtischer Unterstützung, sind, und in denen naturgemäß eine größere Freiheit herrscht.

Über die Elemente *Legendre*'s siehe „Parallelen". Von der 12. Auflage an, die sehr wesentliche Änderungen aufweist, sind die anderen nur Abdrücke, die z. B. von *Blanchet* seiner Bearbeitung *Legendre*'s (1. Aufl. 1845, 2. Aufl. 1852) angefügt werden. Gleichzeitig mit *Legendre* und in demselben Sinne, d. h. antieuklidisch, ist

L. Bertrand (de Genève) zu nennen, dessen Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques (s. Parallelen) schon vor 1778 fällt, woraus später 1812 die Éléments de géométrie hervorgingen, ein Werk, das die Lebensarbeit dieses hervorragenden Denkers zusammenfaßte. Aus dem 18. Jahrhundert ragen tief in das 19. Jahrhundert hinein die Arbeiten *P. Tédénat*'s.

Ét. Bézout's (vgl. z. B. dessen Resultante), dessen ursprünglich für die Artillerieschule bestimmter Cours de mathématiques von 1770—72 in *Reynaud* 1812 einen tüchtigen Bearbeiter fand; 9. Edition 1845.

A. C. Clairaut, Éléments de géométrie, Paris 1741, auch in Deutschland auf den Ritterakademien z. B. Ilfeld verbreitet; nach 1853 und 1860 von *Saigey* neue Ausgaben. Das Original ist von einer fast verblüffenden Kühnheit, der Bruch mit der *Euklid*ischen Methode kann nicht stärker sein.

S. F. Lacroix, Éléments de géométrie von 1799, an Erfolg mit *Legendre* wetteifernd, Paris 3. Aufl. 1803, 10. Aufl. 1814, 13. Aufl. 1825, 15. Aufl. 1837, dann von *Prouhet* bearbeitet, 23. Aufl. 1887, 24. Aufl. 1890.

Die Lehrbücher von *Legendre*, *Bézout*, *Clairaut*, *Lacroix* sind in alle Kultursprachen übersetzt (*Legendre* von *Crelle* ins Deutsche).

Chr. Kramp (der Straßburger Professor, bekannt durch seine Arbeiten über die „Fakultäten"; das Zeichen ! rührt von ihm her), Éléments de géométrie, Cöln 1809.

L. B. Francoeur, Cours complet de mathématiques pures, Paris 1809; viele Auflagen, viele Übersetzungen, deutsch und italienisch; noch *Petersen* hat die Inkommensurabilität nach *Francoeur* behandelt.

L. Puissant, Recueil de divers problèmes de géométrie etc. par l'analyse algébrique (Deutsch 1806).

A. A. L. Reynaud, Théorèmes et problèmes de géométrie, Paris 1819 (Anhang deskriptive Geometrie); 1838 schon die 10. Auflage.

A. A. L. Reynaud, Traité d'application de l'algèbre et de trigonométrie à la géométrie. Paris 1819.

O. Terquem, Manuel etc., Paris 1828, 2. Edit. 1838.

A. J. H. Vincent, Cours de géométrie, Paris 1827; 5. Aufl. *Vincent-Bourdon* 1844, 1856 *Saigey.*

E. E. Bobillier, Cours de géométrie, Châlons-s.-M. 1832, 3. Aufl. schon 1837, 13. Aufl. Paris 1865, 18. Aufl. 1880.

Vincent und *Bobillier* sind zwei ausgezeichnete Lehrbücher.

P. J. E. Fink, Géométrie élémentaire, Paris 3. Aufl. 1844.

J. Percin, Éléments de Géométrie simplifiée, Paris 4. Aufl. 1848.

P. L. Cirodde, Leçons de géométrie (mit Elementen der deskriptiven Geometrie), Paris 2. Aufl. 1844.

E. Lionet, Éléments de géométrie, Paris 1841, 2. Aufl. 1844, 3. Aufl. 1846, noch heute ein sehr gutes Schulbuch. *Lionet* hebt den Dualismus zwischen Stereometrie und Planimetrie sehr scharf hervor, und ist ein Vorläufer der „Fusion".

A. Mahistre, Traité de géométrie, Chartres 1840. *Mahistre* hat in den Analogies de la géométrie élém. et de la géométrie dans l'espace (*2. Aufl.*) 1844, deutsch 1845) zum erstenmal die Fusion durchzuführen versucht.

Eug. Catalan, Éléments de géométrie, Paris 1843, Analyse von *Thibault* (Vereinfachung des *Cauchy*schen Beweises von der Kongruenz flächengleicher Polyeder). Die sehr anerkennende Rezension hat der Erfolg bestätigt, der namentlich seit der wesentlich verbesserten Auflage von 1866 eintrat. *La Frémoire*'s *Théorèmes et problèmes* werden erst gut durch die Mithilfe *Catalan*'s, Paris 2. Aufl. *1852*, 6. Aufl. *1879.*

C. F. Fournier, Éléments de géométrie, Paris 3. Aufl. 1846.

F. J. Retsin, Théorèmes et problèmes. Bruxelles 1851 (ebene Geometrie und Trigonometrie, reichhaltig).

Im Jahre 1854 wird ein neuer Lehrplan eingeführt und äußert seine Wirkung in neuen Lehrbüchern.

J. F. Bonnel, Éléments de géométrie, Paris 1. Aufl. 1854, oft aufgelegt.

A. Amiot, Éléments de géométrie, Paris 1855. Manche Ausstellungen *Terquem*'s werden allmählich beseitigt. (1881 von *Vintéjoux.*)

Paul Serret, Des méthodes en géométrie, Paris 1855.

Ch. Briot et *Ch. Vacquant,* Paris 1856, 5. Aufl. 1862, 6. Aufl. 1869—72; später *Vacquant* allein.

E. Catalan, Manuel etc., Paris 1857, 10. Aufl. 1886.

G. Ritt, Précis de géométrie et trigonométrie 1857.

Ch. de Comberousse, Cours de mathématiques (1—2), Paris 1862, Ursprung des zur Zeit verbreitetsten Lehrbuchs in Frankreich: ***Rouché*** et ***De Comberousse,*** *Traité de géométrie élémentaire*, Paris 1. T., géométrie plane, 1864, 2. T., Stereometrie und Kegelschnitte 1866; zwei Appendices. Reguläre Polyeder und Projektive Beziehungen und Involution. Die rasch aufeinander folgenden Auflagen verarbeiteten ein immer größeres Material; das der 7. Auflage von 1900 (von *Eug. Rouché* allein besorgt) ist in unsern Schulen kaum halb zu bewältigen. Das Buch ist als Handbuch für jeden Lehrer ein Schatz. Dazu 1896 von *R.* et *de C.*: *Solutions détaillées* zu den *Leçons de géométrie*, Paris 1896.

F. H. Le Roux, Cours de géométrie élémentaire, Paris 1862.

P. F. Compagnon, Éléments de géométrie, Paris 1. Aufl. 1867, 2. edit. 1876 (derselbe: Abrégé etc. Paris 1877: Questions proposées.

Charles Méray, Nouveaux éléments de géométrie, Paris 1874, Stereometrie

und Planimetrie gemeinsam behandelt, die Fusion noch weiter als bei *Mahistre* durchgeführt. Neue Auflage 1903.

A. Cambier löst 1875 *Blanchet* in der Bearbeitung des *Legendre* ab.

A. Desboves, Questions de géométrie élémentaire etc., sehr reichhaltige Aufgabensammlung, 2. sehr vermehrte Aufl. 1875, 3. Aufl. 1880, 4. Aufl. 1885.

A. Longchampt, Recueil de problèmes (Sorbonne 1853—75, concours généraux, zu denen die besten Schüler von jeder Anstalt gedrillt wurden) Baccalaureat (Abiturientenexamen) 1877.

Luc. Buys, Géométrie; La science de l'espace, sehr ausführlich (Autodidakt?), merkwürdig durch den Appendix nach *K. Ch. F. Krause*'s (des Philosophen) Novae theoriae etc., welche *Schroeder,* München 1835, herausgegeben hat.

J. Lenthéric, Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie *moderne,* Paris 1874.

Sehr viele Auflagen hat die kurze Geometrie von

G. F. Olivier, Géométrie usuelle, erhalten, 1. Aufl. Paris 1829, 9. Aufl. 1854, sowie

E. Bède, H. Vernier und *A. Guilmin.*

Aber seit 1880 etwa dominieren neben dem in den geistlichen Anstalten festgehaltenen *Legendre* die Éléments (nicht der Traité) von *Rouché* et *De Comberousse* und vor allem der Cours (für Real- und Oberrealschulen) und der Précis (für Gymnasien) von *Ch. Vacquant, inspecteur* de l'instruction publique (an wissenschaftlicher Arbeit weit hinter *Rouché* et *De Comberousse*).

Um 1900 scheint sich eine Wendung in der Richtung philosophischer Vertiefung geltend zu machen.

Guido de Longchamps, Cours de mathématiques spéciales, Paris 1885.

J. F. Bonnel, Essai de géométrie rationale, Lyon 1891. (Sein Versuch, das Parallelenaxiom zu beweisen, findet keine günstige Aufnahme.)

L. Foucault, Paris 1894.

E. Lebon, Géométrie élémentaire, Paris 1896.

Weill, Géométrie plane, Paris 1896.

Ch. A. Laisant, Receuil de problèmes de mathématiques (2. T. Geometrie), Paris 1893 (aus den *Nouvelles annales, dem Bourget, der Mathesis,* eine sehr dankenswerte Arbeit entsprechend unserer Sammlung aus der Zeitschr. f. mathem. Unterr.).

Da Zeitmangel mich hindert, den Artikel Lineargeometrie auszuarbeiten, so verweise ich hier nur auf:

G. de Longchamps, Essai de géométrie de la règle et de l'équerre, Paris 1890 (vgl. auch Mathesis, *Bourget* besonders die Artikel von *De Coatpont, E. Césaro, De Tilly* etc.).

Sehr reichhaltige Aufgabensammlungen sind die Exercices de géométrie von *F. J.* (3. Aufl. 1896) (mir von Herrn *Neuberg* mitgeteilt) zu seinen Éléments de de géométrie, die 1896 in 9. Aufl., 1899 in 10. Aufl. verbreitet waren.

Zwei sehr bedeutende Geometer verbinden sich in:

B. Niewenglowski et *L. Gérard*, Cours de géométrie élémentaire, Paris 1898 und 1899.

Frankreichs *bedeutendsten* Geometer treffen wir in:

J. Hadamard, Leçons de géométrie *élémentaire* (géométrie plane) publiées sous la direction de ***G. Darboux*** 1898. Es ist dies der 4. Teil und der bebedeutendste Teil des Sammelwerkes:

Cours complet de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de *M. Darboux,* das in unserer Enzyklopädie der Elementarmathematik von *H. Weber* und *J. Wellstein* ein Seitenstück besitzt.

Zur französischen Literatur wird auch des bekannten deutschen Geometers *F. Joachimsthal* fürs französische Gymnasium in Berlin (Collège) bestimmte Cours de Géom. élém., Berlin 1852, gerechnet.

Der Lehrplan vom 31. Mai 1902 schränkt die Mathematik auf der Abteilung A und B (Gymnasium) äußerst ein; in der obersten Stufe, der classe de philosophie, welche der Unterprima des deutschen Gymnasiums entspricht, ist der Mathematik eine zweite obligatorische Stunde eingeräumt, dafür soll dort die Mathematik vom Einmaleins bis zur Integralrechnung inklusive Stereometrie und Trigonometrie gelehrt werden. Für diesen Kursus ist das Werk von:

Jules Tannery, Notions des mathématiques, Paris 1903, mit Notions historiques von *Paul Tannery* bestimmt, aber das Werk kann trotz der hervorragenden Geschicklichkeit des Verfassers die Oberflächlichkeit nicht verleugnen, welche die unbedingt notwendige Folge eines solchen Lehrplanes ist.

Deutschland.

Eine Bemerkung zuvor. Während in Frankreich Mathematiker wie *Legendre, Clairaut, Bertrand, Vincent, Bobillier, Lionnet, Terquem, Catalan, Rouché* usw. elementare Lehrbücher schreiben, in Italien *Betti, Brioschi, Veronese,* gilt das in Deutschland nicht für voll. Eine Ausnahme machen in Deutschland *Felix Klein,* der sich sehr für die Lehrer bemüht hat, und *H. Weber* mit seiner Algebra und der Enzyklopädie der Elementarmathematik von *H. Weber* und *J. Wellstein.* Wirkliches Interesse für die Mittelschulen hat auch *A. Brill* betätigt.

Aus dem 18. Jahrhundert ragen in das 19. hinein:

Chr. (v.) Wolff, Anfangsgründe, Halle 1710, der Auszug aus demselben von 1717 noch 1818 neu bearbeitet von *Tobias Mayer,* dem großen Astronomen, und *C. Langsdorf,* der die unendliche Teilbarkeit des Raumes leugnete.

A. G. Kästner, Anfangsgründe der angewandten Mathematik, Göttingen 1759, 6. Aufl. 1800.

W. J. G. Karsten, Lehrbuch der gesamten Mathematik (lateinisch 1760), Greifswald 1767—77, die sieben ersten Teile neu bearbeitet von *Mollweide* 1812 bis 1818.

J. A. (von) Segner, dessen „Elemente" von 1799 (deutsch, Halle 1756) sogar ins Ungarische übersetzt sind und 1769 ins Neugriechische.

J. F. Lorenz (der Übersetzer des *Euklid* [1775 und 1781], von *Segner* stark beeinflußt), Grundriß der reinen und angewandten Mathematik, Helmstädt 1791 bis 1792, 3. Aufl. 1807, 4. Aufl. 1817, 5. Aufl. 1820 von *Gerling*, ein Buch, dessen Lektüre noch immer lohnend ist (siehe Parallelen), 8. Aufl. 1851.

Georg Simon Klügel, Anfangsgründe usw., Berlin 1872, 6. Aufl. 1819, von *E. F. Zimmermann* bearbeitet.

C. Chr. Langsdorf, Anfangsgründe der reinen elementaren und höheren Mathematik, auf Revision der bisherigen Prinzipien gegründet, Erlangen 1802.

J. H. Pestalozzi, *A B C der Anschauung*, Zürich und Leipzig 1803.

J. F. Schmidt (der bekannte Gehilfe *Pestalozzi*'s), *Pestalozzi*'s Größenlehre usw., Halle 1805.

Meier Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben, Berlin 1. T. 1805, 2. T. 1807; *sehr viel wissenschaftliche Arbeit*, die Rechnung bevorzugt.

A. Meyer, Anleitung zur Geometrie in sokratisch-*heuristischer* Form für Schullehrer, Altona 1803—5.

(*J. Michelsen*, sein Vorgänger, Versuch in sokratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Elem. Geom. etc. Berlin 1781—84.)

B. F. Thibaut, Grundriß der reinen Mathematik, Göttingen 1. Aufl. 1801, *2. Aufl.* umgearbeitet *1809*, 3. Aufl. 1819, 5. Aufl. 1831. Kein eigentliches Schulbuch (s. Parallelen).

J. C. F. Hauff, Lehrbegriff der reinen Mathematik, Frankfurt 1803.

Fr. Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik usw., Jena 1810, 7. Aufl. 1844.

Tobias Meyer, Neue und allgemeine Art alle Aufgaben aus der Geometrie leicht aufzulösen usw., Eßlingen 1741 (sein Erstlingswerk); neu bearbeitet von *Benzenberg* 1813.

Joh. Andr. Matthias, Anleitung zur Erfindung und Ausführung elementargeometrischer Beweise und Auflösungen 1811, *Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht* usw., Magdeburg 1814, viele Auflagen, 7. Aufl. 1845.

Georg Simon Ohm (Entdecker des *Ohm*schen Gesetzes), Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheres Bildungsmittel, Erlangen 1817.*) (Heuristische Methode.)

Martin Ohm, Elementargeometrie und Trigonometrie an der Berliner Universität, Berlin 1819, 1826, 1847.

F. W. D. Snell (der 1786 über die beste Methode der Mathematik in den Schulen geschrieben hat), Leichter Leitfaden der Elementargeometrie und Trigonometrie, Gießen 1799, 2. Aufl. 1805; 5. Aufl. 1816; 6. Aufl. 1819. Handbuch der reinen Mathematik, 2 Bände 1810.

J. K. Fischer, Grundriß der gesamten Mathematik, Göttingen 1807.

A. L. Crelle, *Über Parallelentheorie* und das System in der Geometrie, Berlin 1816; *Sammlung mathematischer Aufsätze* 1821 und 1822; *Legendre*'s *Geometrie*, Berlin 1822, Lehrbuch der Elemente der Geometrie, Trigonometrie, Polygonometrie, Stereometrie, Polyedronometrie, Berlin 1825—27.

D. Ch. L. Lehmus, Aufgaben aus der Körperlehre, Berlin 1811; Lehrbuch der Geometrie, Berlin, 2 Bände 1819—20, umgearbeitet 1826, 2. Aufl. 1840; Aufgelöste Aufgaben usw., Berlin 1836. (*Lehmus*sche Satz, *Malfatti*sche Aufgabe usw.)

J. C. Fischer, Reine Elementarmathematik auf Grund der kritischen Philosophie (*Kant*), 1820.

*) *Poggendorff* irrtümlich 1818.

Ernst Gottfr. Fischer, Leitfaden der Elementarmathematik, Berlin 1820—24, später 1858, von *E. F. August* bearbeitet.

Magnus G. v. Paucker, Die ebene Geometrie, Königsberg 1823; Fundamente der Geometrie, Leipzig 1842; Geometrisches A B C-Buch, Leipzig 1842. *Paucker* war ein sehr tüchtiger Elementargeometer (17 Eck usw.).

Ad. Tellkampf, Vorschule der Mathematik, Berlin 1829; ein gedankenreiches Buch, 2. Aufl. 1838, 4. Aufl. 1847.

Joseph Knar, Anfänge der reinen Geometrie, Graz 1829; ich weiß nicht, ob dieses sehr durchdachte Werk eine zweite Auflage erlebt hat.

H. v. Holleben und ***P. Gerwien,*** Geometrische Analysis, 2 Bände, Berlin 1831 und 1832, und

J. H. v. Swinden (s. unten), Elemente der Geometrie aus dem Holländischen übersetzt und (*sehr*) *vermehrt* von ***C. F. A. Jacobi,*** Jena 1834. Es sind die beiden reichsten deutschen Aufgabensammlungen, beide meines Wissens nur in einer Auflage erschienen, aber oft geplündert. S. dazu:

Aug. Wiegand, Die schwierigen geometrischen Aufgaben aus des Professors *C. F. A. Jacobi* Anhängen usw., Halle 1849, und

Major *De Niem**), Beweise und Auflösungen *sämtlicher* Lehrsätze und Aufgaben, 2 Bände, Halle 1868.

Jakob Steiner, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833, von *Steiner* als Schulbuch gedacht und auch oft dazu benutzt (z. B. von *Milinowski* in Weißenburg), neu herausgegeben in *Ostwald's* Klassikern 1895. Vgl. *Jakob Steiner's* Lebensjahre in Berlin 1821—1863 von *Jul. Lange,* Progr. 116 (1899) Berlin.

J. A. Grunert, Lehrbuch der Mathematik für die Oberklassen höherer Lehranstalten, Brandenburg 1832, 2. Aufl. 1835.

H. A. Brettner, Lehrbuch der Geometrie usw., Breslau 1835, 2. Aufl. 1838, 5. Aufl. 1853 usw.

Karl Koppe, Anfänge der reinen Mathematik, Essen 1836. Die *Koppe*schen Bücher, für damalige Zeit in ihrer Art sehr gut (auch für Physik), erlebten rasch viele Auflagen unter *Koppe* selbst, wurden und werden fortwährend bearbeitet (*Dahl, Diekmann*), 4. Aufl. 1852, 6. Aufl. 1856 usw.

L. A. Kunze, Lehrbuch der Geometrie, Jena 1842, 2. Aufl. 1851; nur Planimetrie, aber ein äußerst reichhaltiges und selbständige Arbeit enthaltendes Buch.

C. A. Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie, Jena 1844, meines Wissens nur *eine* Auflage.

A. Wiegand, Mathematische Formenlehre (Aufgabensammlung), Halle 1842; Lehrbuch der Planimetrie, 1842, 8. Aufl. 1871. Die *Wiegand*schen Bücher fanden dann in *Friedrich Meyer* einen hervorragenden Bearbeiter.

E. F. August, vollständiges Lehrbuch der Mathematik, 1. Kursus, Berlin 1833 (Prismatoid).

Schulz v. Straßnicki, Elemente der Geometrie, Wien 1835; Anfänge der Geometrie, aus der Anschauung begriffsmäßig entwickelt, Wien 1857, dazu:

E. Pfriemer, 1409 theoretische und praktische Aufgaben, Wien 1850.

---

*) Der Vorname ist auf keine Weise festzustellen, und fehlt auf dem Titel, ich habe vergeblich die Rang- und Quartierliste und den Gothaer Kalender durchsucht.

C. Meyer, Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien, Potsdam 1837, 38, 40; viele Auflagen; die späteren (13. Aufl.) haben in *Martus* einen tüchtigen Bearbeiter gefunden.

G. H. Burhenne, Die Mathematik als System betrachtet, Cassel 1839; Die Raumgestalten nach ihrer *Symmetrie* dargestellt, Cassel 1832.

G. F. Hartmann, Anfänge der darstellenden Geometrie, Hannover 1833.

J. J. v. Littrow, Kurze Anleitung zur gesamten Mathematik, darin Trigonometrie vor Planimetrie, und diese auf Trigonometrie gestützt, Wien 1838 (s. unten *Hübner*!), Definition der Ähnlichkeit, p. 145 § 42.

Lorenz Woeckel, Die Geometrie der Alten (Aufgabensammlung), Nürnberg 1830, *13. Aufl.* 1886.

E. Grebe, Leitfaden für den Vorbereitungsunterricht in der Geometrie, Cassel 1840.

A. Arneth, System der Geometrie, Stuttgart 1840.

F. Rummer, Leitfaden der Elementargeometrie (mit Aufgaben), Heidelberg 1841; schon 1854 die dritte Auflage.

F. Proß, Leitfaden der Geometrie (Planimetrie, Stereometrie, Anwendung der Algebra), Stuttgart 1842; ein *hervorragendes Buch, eine* Auflage.

J. H. T. Müller, Planimetrie, Halle 1844, Stereometrie 1851; das hervorragendste Buch des in der Elementargeometrie durch tüchtige Arbeiten (Tetraeder, Prismatoid usw.) verdienten Mannes; meines Wissens nur eine Auflage; *Trigonometrie* 1852.

Hugo v. Bose, Zeichnende Geometrie als *Vorschule* für die Geometrie usw., Dresden 1846.

A. L. Busch, Vorschule der darstellenden Geometrie (Vorwort von *C. G. J. Jacobi*), Berlin 1846; 2. Aufl. Berlin 1868.

Major *Meno Burg,* Grundriß der Vorträge über die geometrische Zeichenkunst usw. (Artillerieschule), Berlin 1851.

W. Gallenkamp, Die Elemente der Mathematik, Iserlohn 1850; 4. Aufl. 1874; 5. Aufl. 1881 des sehr durchdachten Buches 1860.

L. Kambly, Elementarmathematik, Breslau 1850, 52, 53, 56 usw.; *100 Auflagen* (die 101. von *Roeder*); ein beispielloser Erfolg, obgleich oder vielleicht weil das Buch ohne wissenschaftlichen Wert ist.

H. B. Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie, Hamburg 1851, sehr viele Auflagen.

C. Spitz, Elemente der Geometrie, Heidelberg 1852, 2. Aufl. 1862, 8. Aufl. 1881, vom Sohne besorgt.

Chr. Paulus, Grundlinien d. neueren ebenen Geometrie m. e. Sammlung v. mehr als 1000 erläuterten Aufgaben, Stuttgart 1853.

Richard Baltzer, Die Elemente der Mathematik, Leipzig 1853; für Lehrer; reich an zuverlässigen historischen Notizen, was ohne Vorgang in solchen Elementarbüchern war; die nicht-euklidische Geometrie zuerst beachtet; streng wissenschaftlich und eigene Arbeit verwertet (Ähnlichkeit, Inhalt usw.). 5. Aufl. 1881.

Karl Fresenius, Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur, Frankfurt 1854, philosophisch aber anregend.

H. Scheffler, Der Situationskalkül, Braunschweig 1851; über *Scheffler* vergleiche Methodik. Es treten eben dieselben Gedanken gleichzeitig auf.

H. Graßmann, Die Wissenschaft der extensiven Geometrie oder die Ausdehnungslehre, Leipzig 1844.

B. Féaux, 1. Bd. Planimetrie, 2. Bd. Stereometrie, Münster 1857; oft aufgelegt (von *Dahle*).

J. O. Gandtner und *K. F. Junghans,* Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie, Berlin 1856, 59; viel benutzt, 3. Aufl. 1882 (von *Junghans* allein), 6. Aufl. 1895.

Th. Wittstein, Lehrbuch der Elementarmathematik, Hannover 1856—62; 15. Aufl. 1895.

H. Heilermann, Sammlung geometrischer Aufgaben, Essen 1857; allmählich sehr erweitert, 5. Aufl. 1884.

F. G. Mehler, Hauptsätze der Elementarmathematik (Vorwort von *Schellbach*), Berlin 1859, unter Einwirkung von *Schellbach* entstanden und erweitert, sehr kurz und meist wissenschaftlich begründet, besonders ist die Stereometrie gut, 10. Aufl. schon 1880; gegenwärtig hrsg. von *G. Baseler.*

C. Th. Anger, Elemente der Projektionslehre, Danzig 1858. (Neuere Geometrie schon 1839.)

Th. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie (mit Aufgaben), Potsdam 1862; die tüchtige Arbeit des verdienten Geometers hatte 1894 die 21. Aufl.

J. Helmes, Elementarmathematik, Hannover 1862—64, 2. Aufl. 1874—81; brauchbares Buch, besonders die Trigonometrie.

K. H. Schellbach (vgl. Methodik), Sammlung und Auflösung mathematischer Aufgaben unter Mitwirkung von *H. Lieber* bearbeitet und herausgegeben von *E. Fischer,* Berlin 1860.

Oskar Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maßes, Leipzig 1862, wiederholt aufgelegt; später Handbuch der Mathematik unter Mitwirkung von *F. Reidt* und *R. Heger,* Leipzig 1879—81, 2. Aufl. 1904.

H. C. E. Martus, Mathematische Aufgaben usw. (Sammlung der deutschen *Abiturienten*-(Baccalaureus)*Aufgaben*), Greifswald 1865, *10 Auflagen*! (von der dritten an Leipzig bezw. Dresden).

H. Pfaff, Neuere Geometrie, Erlangen 1867.

Fr. Reidt, Die Elemente der Mathematik, Berlin 1868, oft aufgelegt.

H. Lieber und *F. v. Lühmann,* Geometrische Konstruktionsaufgaben, Pyritz 1870; von der 2. Aufl. 1874 bis zur letzten (14.) Aufl. 1899 Berlin (Simion); z. Z. die für die Schüler brauchbarste Aufgabensammlung Deutschlands.

J. Frischauf, Elemente der Geometrie, Graz 1870; 2. Aufl. 1877.

Xaver Stoll, Anfangsgründe der neueren Geometrie. Bensheim 1872. *F. Geiser,* Einleitung in die synthetische Geometrie (s. Methodik). Leipzig 1869.

Georg Recknagel, Geometrie für die Schule, München 1871, 2. *verbesserte* Aufl. 1876, seitdem oft aufgelegt; das Werk eines durchgebildeten Mathematikers.

J. C. Becker, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie an Mittelschulen, Schaffhausen 1872; eigenartig, daher ohne äußern Erfolg.

J. Worpitzky, Elemente der Mathematik, Planimetrie, Berlin 1874; vgl. die Bemerkung zu *Becker.*

F. Kruse, Elemente der Geometrie, Berlin 1875 (Polygon).

H. Lieber und *F. v. Lühmann,* Leitfaden der Elementarmathematik, Berlin 1876, 77, 2. Aufl. schon 1879, jetzt herausgegeben von *Müsebeck.* Die beiden tüchtigen Männer, denen die deutsche Lehrerwelt so viel verdankt, sind beide verhältnismäßig früh gestorben.

Joh. Karl Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage, streng

deduktiv dargestellt (für Lehrer), Berlin 1877, und Lehrbuch der Elementarmathematik, Berlin 1877—79 (vgl. die Bemerkung bei *J. C. Becker*).

V. Schlegel, Leitfaden der Elementarmathematik, 1880, vgl. die Bemerkung bei *J. C. Becker*. *Schlegel* ist der bekannte Vorkämpfer für die *Graßmann*sche Ausdehnungslehre.

Julius Petersen (deutsch von *Fischer-Benzon*), Leitfaden der elementaren Planimetrie, Kopenhagen 1881; *Methoden und Theorien*, Kopenhagen; dänisch 1866, deutsch 1879, französisch 1880.

F. Glinzer, Lehrbuch der Elementargeometrie, Hamburg 1880—81.

J. Henrici und *P. Treutlein*, Lehrbuch der Elementargeometrie, Leipzig 1881—83, ganz auf dem Standpunkt der neueren Geometrie; projektive Beziehungen systematisch benutzt; I. T. 3. Aufl. 1897; II. T. 2. Aufl. 1896; III. T. 2. Aufl. 1901! vgl. die Bemerkung bei *J. C. Becker*, und das ist eins der besten Lehrbücher Deutschlands.

A. Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen, Leipzig 1881; auch für diesen hervorragenden Synthetiker vgl. die Bemerkung bei *J. C. Becker*.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882 (*für Lehrer*).

C. F. Hertter, Zeichnende Geometrie, Stuttgart 1882.

G. Müller, Zeichnende Geometrie, Stuttgart 1884, 6. Aufl. 1900.

Friedrich Meyer, 3. Kursus der Planimetrie, zugleich als *Vorbereitung* auf die neuere Geometrie, Halle 1885 (*Sturm*scher Beweis, daß das Kreispolygon Maximum ist, usw.); ein Vermächtnis des zu früh gestorbenen ausgezeichneten Lehrers und Mathematikers.

O. Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, Leipzig 1887 (s. Methodik).

Hubert A. Müller, Die Elemente der Planimetrie, ein Beitrag zur Methode des geometrischen Unterrichts, Metz 1889, 7. Aufl. 1899; *Symmetrie*(-Achse und -Punkt).

Max Simon, Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die *absolute Geometrie*, *Straßburg* 1890 (für Lehrer), vgl. die Bemerkung bei *J. C. Becker*.

E. Schilke, Sammlung planimetrischer Aufgaben, Leipzig 1890, billig und brauchbar.

W. Fuhrmann, Synthetische Beweise planimetrischer Sätze, Berlin 1890; für *Didaktik* und *neuere Dreiecksgeometrie* sehr zu empfehlen.

K. Schwering, 100 Aufgaben aus der niedern Geometrie, Freiburg 1891, 2. Aufl. 1890. Die Aufgaben wie ihre oft sehr feinen Lösungen zeigen den bedeutenden Methodiker und Mathematiker.

Chr. Ernst und *L. Stolte*, Lehrbuch der Geometrie, Planimetrie nebst Aufgaben, Straßburg 1891, 4. Aufl. 1902.

Der neue glücklicherweise kurzlebige preußische Lehrplan von 1892 rief dann neue Bearbeitungen fast aller Lehrbücher hervor und zeitigte als Blüte:

G. Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik, Leipzig 1894, 3. T. 1895; 1898 schon dritte Doppelauflage; wir nennen ferner:

K. Schwering und *W. Krimphoff*, Anfangsgründe der ebenen Geometrie, Freiburg 1894, 3. Aufl. 1900. *K. Schwering* allein: Stereometrie, Freiburg 1894.

M[dme]. *W. J. Schiff*, Methoden zur Lösung der Fragen der elementaren Geometrie, Petersburg 1894; gute Einleitung in die neuere Geometrie.

E. F. Borth, Die geometrische Konstruktion, Leipzig 8. Aufl. 1894.

J. Egger, Übungsbuch für den geometr. Unterricht, *Bern* 3. Aufl. 1894.

G. Mahler, Ebene Geometrie, Sammlung Göschen 1895; rasch neu aufgelegt; 3. Aufl. 1900, Abdruck 1902.

R. Hercher, Lehrbuch der Geometrie, Leipzig 3. Aufl. 1896 (auf Grund des preußischen Lehrplans von 1892!).

K. Fink, Die elementare systematische und *darstellende* Geometrie der Ebene in der Mittelschule, dazu Aufgaben und von *K. Fink* und *Auer*, 10 Figurentafeln und 84 Übungsblätter usw., Tübingen 1896. Das erste Heft hat als Anhang einen kurzen Abriß der Geschichte der Geometrie; von *G. Hauck* empfohlen.

K. Schmid, 100 ausführlich gelöste geometrische Aufgaben (Aufg. aus der bayrischen Lehrer-Anstellungsprüfung usw.), München 1896.

H. Dobriner, Leitfaden der Geometrie für höhere Lehranstalten (Proportionslehre auf Flächenvergleichung gegründet), Leipzig 1898.

J. C. V. Hoffmann, Sammlung der Aufgaben aus den *ersten 25 Bänden* der Zeitschr. f. mathem. Unterr., geordnet von *R. Emmerich* und *Müsebeck,* Leipzig 1898.

E. Sailer, Aufgaben aus der Elementarmathematik (Bayrische Staatsprüfung), München 1878—93, 1898.

W. Pflieger, Elementare Planimetrie, Leipzig 1901 (Sammlung *Schubert II*), ein Buch, das die Skizze, die *M. Simon* in seinen „Elementen usw." von 1890 gibt, sorgfältig aus- und weiterführt, und die abfällige Kritik Herrn *Thiemes* in keiner Weise verdient, dessen Leitfaden der Mathematik von 1902 daneben eine dürftige Leistung ist.

An speziell österreichischen Büchern erwähne ich für den Anfang des Jahrhunders die Bücher von

G. v. Vega, Anfangsg. d. Geometrie, Wien 1802,

für die Mitte:

L. C. Schulz v. Straßnitzki, Anfangsgr. d. Geometrie, 1. Heft, Wien 1851.

G. Winkler v. Brückenbrand, Lehrb. d. Geometrie, d. eb. Trigonometrie und Polygonometrie, 5. Aufl. von *F. Bauer,* Wien 1857,

und für die letzte Zeit:

F. Hočevar seit 1889 sehr verbreitet.

L. Močnik, Lehrbuch der Geometrie für die Obergymnasien, Wien 1833, oft bearbeitet, auch italienisch, *22. Aufl.* bearbeitet von *F. Wallentin,* Wien 1894.

V. Vieth, Die Lehre der vollständig reinen Mathematik für den Selbstunterricht, 2 Teile, Wien 1852.

Es seien auch die tüchtigen Lehrbücher: *Haller von Hallerstein*'s für die deutschen *Kadettenschulen,* später von *Hülsen* bearbeitet, nicht vergessen.

F. Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik, 1. Aufl. 1846.

England.

Über die eigentümliche Stellung *Euklid*'s haben wir schon gesprochen; die meisten Arbeiten erscheinen unter der Firma von *Euklid,*

bringen auch den Text, wenigstens der ersten vier Bücher und des sechsten Buches, das fünfte wird nach *De Morgan* bearbeitet, vom elften wird die Hälfte gegeben, das zwölfte macht den Schluß. Zugrunde liegt fast immer die Bearbeitung von

Robert Simson, The Elements of *Euclid*, Edinburgh 1756, die unter wechselnden Bearbeitern zahllose Auflagen erhalten haben. Bedeutenden Einfluß haben auch:

John Playfair's Elements of geometry von 1795 (11. Aufl. 1859) und

Charles Hutton's Mathematische Werke, die noch 1840 von den hervorragenden Geometern *Gregory*, *T. S. Davies*, *W. Rutherford* bearbeitet werden. Zu nennen wären auch

W. Ludlam, *W. Emerson*, Sir *J. Leslie* und *Bonnycastle*.

Aus der Mitte des Jahrhunderts ist

A. de Morgan zu nennen, dessen Connexion of numbers and magnitude, London 1836, entscheidend für die Bearbeitung der Lehre von den Proportionen (V. Buch) geworden ist, und die Elements of *Euclid* von

J. Todhunter, London 1862, die eine selbst in England unerhörte Verbreitung gefunden haben und, da sie von der indischen Verwaltung akzeptiert wurden, in eine ganze Zahl orientalischer Sprachen übersetzt worden sind.

Aufgaben (exercises) sind zahlreich in den *Euklid*-Ausgaben enthalten, auch „keys“ (Schlüssel) vielfach hinzugefügt. Daneben sind schon seit 1800 die Exmamenaufgaben aus den einzelnen „colleges“ von Cambridge und etwas später aus dem „Senate-house“ (wo die großen Prüfungen abgehalten werden) gesammelt worden, und seit etwa 1860 auch die von Oxford. Viele Aufgaben enthalten die Journale: The ladies' diary von 1720—1869, The gentlemen's diary von 1741—1840, von da ab „The ladies' and gentlemen's diary“, sowie *Leybourn*'s „Mathematical repository“, old series im 18. Jahrhundert und new series von 1806—1814.

Überreich sind die „Educational times“, deren Material gesammelt ist in den „Mathematical questions and solutions from the educational times“, edit. by

W. J. C. Miller von 1864 bis 1897, dann von *D. Biddle* bis 1901, seit 1902 von *C. J. Marks*. Es sind die besten englischen Namen, die sich an den Aufgaben und ihren Lösungen beteiligt haben, *Cayley* und *Sylvester* eingeschlossen, auch viele hervorragende Franzosen, von deutschen Hochschullehrern habe ich *Emil Lampe*, *Felix Klein*, *E. Czuber* konstatiert.

Sehr zahlreich sind als Zusätze zu den *Euklid*-Ausgaben die Trigonometrien, von denen ich die hervorragendsten unter „Trigonometrie“ anführe.

Wichtig für den heutigen Schulunterricht sind die „General reports“

der A. I. G. T. (*Association* for the *improvement* of *geometrical teaching*), die mir leider nicht direkt zur Verfügung standen.

Verlagsort meist London, die Verleger sind eigentlich das entscheidende, da in *England* und *Amerika* die größeren Firmen Filialen haben.

J. Playfair, Elements of geometry, Edinburgh 1795, *Euklid*-Text, 6 Bücher, dazu Kreisberechnung, Stereometrie und Trigonometrie, mit Zusätzen von *W. Wallace* 1831, 9. Aufl. 1836 von *J. Davidson*, 11. Aufl. von *P. Kelland* 1846, 12. Aufl 1852.

Charles Hutton, A course of mathematics, 9. Aufl. mit Verbesserungen von *Olinth Gregory* 1840 (key von *Dowling*, 2. Aufl. 1824); 12. Aufl. 1841 von *D. Gregory* und *T. S. Davies*, der 1840 Solutions to the principle questions gegeben; völlige Umarbeitung von *W. Rutherford* 1843.

W. Emerson, Elements of geometry (mit problems), London 1794.

W. Ludlam, Rudiments of mathematics, London 1. Aufl. 1785, 5. Aufl. 1809.

Sir *John Leslie,* Elements of geometry, geometrical analysis and trigonometry, Edinburgh 1809, 4. Aufl. 1820; Rudiments etc. 1828 (übersetzt und sehr vermehrt von *Grüson,* Berlin 1822).

Th. Leybourn, The *mathematical questions* proposed in the *ladies'* diary and their original answers together with some *new* solutions from 1704—1816—1817. An elementary system of theoretical geometry, London 1813; Geometrical solutions, London 1818.

George Phillips, Euclid course of geometry, 1826.

Miles Bland (der die Aufgaben zu den quadratischen Gleichungen geschrieben), Geometrical problems deduced from the first 6 books etc., 3. Aufl. 1827, 4. Aufl. 1849, deutsch von *A. Wiegand,* Halle 1880.

D. Lardner, The first 6 books etc., Kommentar, Aufgaben, 1. Aufl. 1828, 11. Aufl. 1851. (Dabei Stereometry, essay on the ancient geometrical analysis, transversals etc.) *L.* hat auch in der von ihm begründeten sehr verbreiteten *Cabinet cyclopaedia* die elementare Mathematik bearbeitet.

R. Wallace, Mathematical guide, 1850; A treatise on geometry, Glasgow 1832.

T. Perron. Thompson, Geometry without axioms, London 1833, oft aufgelegt, auch ins Französische übersetzt und wiederholt aufgelegt; Ebene und Gerade wie bei *Bolyai* und *Lobatschefskij* definiert und bemerkenswerte Kritik der verschiedenen Parallelentheorien.

Cambridge mathematical examination papers (colleges) 1831—37; problems von 1800—1830 mit solutions von *J. M. F. Wright; Senate-house-problems* von *Jameson* für 1846—51; von *Ferrers* von 1850—51; für 1864 usw. fortgesetzt bis jetzt von verschiedenen Bearbeitern.

R. W. Keith, Euclid. London 1835, oft aufgelegt.

Reynard, Geometrical solutions etc., London 1837.

A. de Morgan, Connexion of numbers and magnitudes, London 1832; Trigonometry and double algebra (double, d. h. Zahlen von der Einheit *i,* Theorie der komplexen Größen, sehr verwandt mit *Hamilton*'s *Quaternionen*) 1849; A course of Mathem. for students, London 1840.

Rumer, Geometry Pestalozzian, 1837.

J. Edwards, The figures of Euclid, with questions etc., 2. Aufl. 1838.

W. Wallace, Geometrical theorems, 1839.

Olinth Gregory, Hints, theorems elucidated etc., 1840.

Th. Keith, The complete measurer etc., corrected and enlarged by *S. Meynard,* 2. Aufl. 1839.

W. D. Cooley, Geometrical propositions demonstrated, London 1840, 2. Aufl. 1852, sein *Euklid* ist von 1839 (London).

T. W. Newman, Difficulties of elementary geometry (parallels), 1841.

W. Rutherford (nach *Simson* bearbeitet) 1847.

Th. Tate, Die drei ersten Bücher des *Euklid* 1849; 2. Aufl. 1851; 1854 usw.

C. P. Mason, Buch 1, 1854 (von *Mason* sind viele hübsche Zusätze in den Diaries).

P. Kelland, Lectures on the principles of elementary mathematics, Edinburgh 1843.

T. S. Davies, W. Rutherford, S. Fenwick geben heraus: *The mathematician,* 3 Bände (1845—56); von letzterem: Elementary course of mathematics für die Kriegsakademie 1853.

J. Cape, Mathematical course 1842, hints to the teacher 1842.

Colenso, Problems etc. 1847, 2. Aufl. 1849.

W. Walton, Problems etc. 1851.

H. G. Latham, Propositions on the properties of conic sections 1848.

P. Morton, Plane, solid and *spherical g.* 1849.

W. Ritchie, Principles of geometry, illustrated 1849, 2. Aufl. 1853 London.

J. Bradley, 1839 }
J. Wolley, 1842 } Praktische, bez. deskriptive Geometrie.

J. Elliot (vgl. *Mason*) 1845.

G. J. H. Reynolds 1850.

A. Jardine 1855.

Sela Smith, New geometry 1850.

T. P. Kirkman (Pascal), First mnemonic lessons on geometry, algebra and trigonometry.

J. Mulcahy, Geometry *modern* 1852.

H. Goodwin, Elementary course of mathematics 1857, 6. Aufl. 1866; collection of problems 2. Aufl. 1852; 3. Aufl. 1862 von Vyvyan, der 1862 solutions dazu herausgab.

J. Todhunter, *Geometry plane* London 1855, *Mensuration* 1861, *Euclid elements* 1862 (enormer Erfolg), 1899 von *G. L. Loney.* Auf die Angriffe der A. I. G. T gegen *Euclid* erwiderte *Todhunter* in dem vortrefflichen The mathematical tripos. (The conflict of study and other essays, darunter Elementary geometry) London 1873.

Law, Geometrical logic 1855.

W. D. Cooley, Elements of geometry, simplified and explained London 1860.

J. M. Wilson (Gegner *Euklid*'s, den er mit sehr nichtigen Argumenten bekämpft): Elementary geometry 1867, 2. Aufl. 1869, id. Lectures on mathematical teaching, Rugby 1870.

Jos. Wolstenholme, A Book of mathematical problems, Cambridge 1867. 2. sehr vermehrte Aufl. 1878.

R. P. Wright, Elements of plane geometry 1868, 2. Aufl. 1871. Vorrede von *Hirst* (siehe *Battaglini* 1868, p. 369).

J. R. Morell, Euclid simplified etc. (französische Werke benutzt.) 1868.

F. S. Aldis, Textbook of geometry 1872 (Stereom. 1865) 2. Aufl. 1880.

R. Townsend, Chapters on the modern geometry of the point, line and circle, Dublin 1863, 65.

Oxford examination papers 1863—1873, fortgesetzt.

T. A. Hirst, Geometrical contributions to the educational times, 1875.

W. A. Willock, Elementary geometry of the right line and circle 1875. S. oben unter 1864.

S. H. Winter, Mathematical exercices for military and civil service etc. 1877.

Woolwich Mathematical papers for admission 1880, fortgesetzt bis jetzt.

J. B. Miller, Elements of descriptive geometry 1878.

E. Loomis, Elements of geometry, a reviewed edition 1876.

O. Henrici (sehr bekannter engl. Mathematiker), Elementary geometry 1879.

John Casey (einer der bedeutendsten neuern Vertreter der Elementargeometrie) Dublin und London 1881: *A sequel to Euclid,* ein Kleinod der Literatur, 7. Aufl. 1895; id. The first 6 books of elements of *Euclid,* Dublin 1882 (in üblicher Weise, der Text genau beibehalten, aber Noten und Anhänge enthalten andere Beweise, Aufgaben, Erweiterungen, neuere Geometrie etc.)

Mukhopadhyay, Solutions of some old questions in mathematics from the educational times 1885.

R. C. J. Nixon, Euclid revised 1886 (Stereometrie 1887) Plane Trigonometry 1882, 3. Aufl. 1895, dazu Supplemente 1891.

Nachdem die A. I. G. T. infolge der Eröffnungsrede von *Sylvester* und der Angriffe *Wilson*'s und *Jones'* gegen *Euklid* eine Kommission eingesetzt hatte, bestehend aus: *Sylvester, Cayley, Hirst, Price, Smith, Spottiswood, Hayward, Salmon, Townsend, Fuller, Kelland, Wilson* und *Clifford*, d. h. so ziemlich aus Englands bedeutendsten Mathematikern, entstand 1878 der *Syllabus* of the A. I. G. T., aus dem dann 1884 und 85 The elements of plane geometry hervorgingen, ein Versuch den *Euklid* zu beseitigen, der an dem Widerspruch der Universitäten, besonders Londons scheiterte. Übrigens waren die Änderungen nicht gerade welterschütternd, standen doch gegen *Sylvester Cayley*, gegen *Clifford Kelland.* Der *Syllabus* drang nicht durch, vgl. *Todhunter* und das durch Humor und Schärfe ausgezeichnete Buch von:

C. L. Dodgson, Euclid and his rivals, London 1880, 2. Aufl. 1885.

H. S. Hall and F. H. Stevens, A textbook of *Euclid.* (1—6 und 11) London 1888, die 2. Aufl. schon 1889; die letzte von 1899 enthält, was man nur verlangen kann, sogar Maxima und Minima und wie üblich sehr viel exercices. *Hall* und *Stevens* erwähnen in der Vorrede eines Euklid-Ausgabe von: Dr. *J. S. Mackay* mit zahlreichen *historischen* Noten: The elements of Euclid book I—VI and parts of book XI and XII, London 1878. Herr *Mackay* hat eine gewaltige Arbeit niedergelegt in den Edinburgh M. S. Proceedings für eine Reihe einzelner Probleme, insbesondere neuere Dreiecksgeometrie, die namentlich die englischen Quellen des 18. Jahrhunderts auf das genaueste berücksichtigt.

J. Blackie and W. Thomson wie *Hall* and *Stevens* 1. Aufl. 1891, 2. Aufl. 1896.

A. T. Richardson, Graduate mathematical exercises for *home works,* 1892.

J. Harrison, Practical plane and solid geometry 1895.

E. M. Langley and W. S. Phillips, The Harpur Euclid, 1895 von *Gibson* gelobt.

T. H. Stains, Elementary mensuration 1895. Aufgaben aus der Praxis für die Schüler.

Edwards, Elements of geometry 1895 (nicht die Methode *Euklid's*).

H. M. Taylor (sehr bedeutender Elementarmathematiker), Elements of Euclid, book I—VI 1893, b. XI und XII 1896 in üblicher Form, vgl. *Hall* and *Stevens.*

A. D. Capel, Common sense Euclid, 2 T., 4. Aufl. 1896.

J. S. Rawley, Practical plane and solid geometry, 16. Aufl. 1896.

R. Sachau, Euclid I und II 1896.

H. Angel, Practical plane and solid geometry, 3. Aufl. 1896.

T. W. Good, Science and art of geometry, 3. Aufl. 1896.

G. M. Minchin, Geometry for beginners 1897 von *Gibson* gelobt.

T. J. Evans and *W. W. T. Pullon,* 1897; Practical plane and solid geometry containing the solutions to the honour questions at examination of science and art, 1889—96.

J. A. Third, Modern geometry of the point, straight line, and circle 1898, von *Gibson* gelobt.

W. W. Cheriton, A simplified Euclid. (Preface by *Elliott Kitchener*) 1898.

G. M. Minchin, Geometry *versus Euclid,* Nature 59, 369, 1899. Ihm stimmt bei

R. J. Dallas, The teaching of geometry, ibid. p. 441.

M. J. M. Hill, The contents of the V and VI book, Cambridge 1900.

Amerika.

Die Selbständigkeit beginnt mit *Sylvester's* Berufung an die John Hopkins Universität. Es ist daher erklärlich, daß *Euklid* dort verlassen wurde. Einer gütigen Mitteilung des Herrn *Virgil Snyder* von der Cornell Universität verdanke ich folgende Liste, die 1890 anhebt:

G. B. Halsted, The elements of geometry. Newyork 1885.

G. B. Halsted, Plane and solid geometry, 1891. *Halsted* ist als Arbeiter auf dem Gebiete nicht-Euklidischer Geometrie bekannt.

A. von Velzer, Plane and solid geometry, Madison (Wisc.) 1894.

G. C. Edwards, Elements of geometry, London and New York 1895.

J. A. Gillett, Euclidean geometry (*Holt & Comp.*), New York and London 1896.

G. V. Pettee, Plane geometry (*Silver, Burdett & Comp.*) Boston 1896.

A. Pullar, Geometry for *Kindergarten* students 1896.

W. J. Meyers, An inductive manual of the straight line and the circle, Denver 1896.

A. Stobbs, The elements of plane geometry (Sovell) 1896.

A. W. Phillips and *J. Fisher,* Elements of geometry, New York 1896. (Abridged ed. 97.)

H. D. Thompson, Elementary solid geometry and mensurations 1896.

W. W. Beman and *D. E. Smith,* Plane and solid geometry 1897, 1. Aufl. 1895.

W. Noetling, Elements of constructive geometry, inductively presented; from the German of *K. H. Stöcker.* Boston 1897.

H. W. Keighwin, Elements of geometry, New York 1897.

W. J. Milne, Plane and solid geometry, New York 1899.

S. W. Furst, Mensurations with special applications 1899.

G. A. Wentworth and *G. A. Hill*, First steps in geometry (*Ginn & Comp.*) 1901.

Sindaru Row, Geometrical exercises in paper folding, reedited by *Beman & Smith* 1901.

A. Schultze and *F. L. Sevenoak*, Plane and solid geometry, New York 1901. (*Macmillan & Comp.*)

W. W. Rupert, Famous geometrical theorems and problems with their history, New York 1901 (Winkelsumme im Dreieck und Pythagoras); es scheint mir ein Auszug aus *Rouse Ball* zu sein (s. Geschichte).

Ich füge noch hinzu

G. A. Wentworth, Plane and solid geometry, Boston 1895, der amerikanische *Kambly*).

Die besten Lehrbücher sollen die von *Phillips* and *Fisher*, *Beman* and *Smith* und *Thompson* sein. Die beiden ersten kenne ich aus Autopsie. Sie sind praktisch und klar, auch enthalten sie Material genug, doch gehen sie den Schwierigkeiten aus dem Wege, in Sonderheit *Phillips* and *Fisher*. Unsern guten Lehrbüchern ebenbürtig ist *James Mac Mahon*, Elementary plane geometry, Chicago 1903.

Gut ist auch *F. H. Holgate*, Plane and solid geometry 1901. (*Holgate* ist der Übersetzer von *Th. Reye*'s Geometrie der Lage.) Das neueste ist *Meyers*, School Mathematics.

Vgl. auch *H. Cajori*, the teaching etc. bei Methodik.

Italien.

Das Land, das im 15. und 16. Jahrhundert jene nur von den Hellenen erreichte Blüte der Kunst und Wissenschaft hervorbrachte, die wir Renaissance nennen, sank infolge der politischen Schicksale wirtschaftlich und wissenschaftlich. Aber seit der nationalen Einigung, oder schon seit 1848, haben wir einen wunderbaren Aufschwung zu verzeichnen wie auf allen wissenschaftlichen Gebieten, so auch auf dem der Elementargeometrie, wo es besonders die Fragen nach der Philosophie der Geometrie und damit auch die pädagogischen sind, welche von den Italienern in hervorragender Weise bearbeitet werden.

Mit *Giorgini*, *Bellavitis*, *Genocchi*, *Cremona*, *Beltrami*, *Betti*, *Brioschi*, *De Zolt* (produktiv), mit *Sannia*, *D'Ovidio*, *Lazzeri*, *Bassani*, *Giudice* (ausführend) und mit *Peano*, *Veronese*, *Ingrami*, *Enriques* steht Italien geradezu an der Spitze des mathematischen grundlegenden Unterrichts.

Das Gesetz der Kontinuität kann man auch hier verfolgen.

Tartaglia, der Verfasser des General Trattato, der 1543 als der erste den *Euklid* in eine lebende Sprache übersetzte;

Commandino, dessen lateinische Ausgabe von 1572 mit der des *Clavius* wetteifert;

Borelli, dessen Euclides restitutus auf *Saccheri* und seine „Reinigung“ des *Euklid* entscheidenden Einfluß übte.

Guido Grandi, *Castiglione*, *Mascheroni*, *Malfatti* und zum Schluß des 18. und Beginn des 19. Jahrhunderts

Vincenzio Flauti, der seine Euklid-Ausgabe von 1818 mit einer Geschichte des Parallelenaxioms begleitete.

Für die Entwicklung stand mir ein Brief *G. Loria*'s vom 16. Januar 1898 zur Verfügung, den ich tunlichst vervollständigt habe. *Loria* unterscheidet drei Perioden: die erste bis zur definitiven Konstituierung des Königreichs Italien, die zweite etwa von 1860—1885, die dritte bis 1900.

In der ersten herrschten in den verschiedenen Ländern sehr verschiedene Traktate: im österreichischen Gebiete italienische Übersetzungen deutscher Bücher (von *Močnik*, *Vega*, *Littrow*, *Schulz v. Straßnicki*), in Piemont *Clairaut*, *Legendre* usw., im Süden die neapolitanische Schule, speziell die Bücher von *Nicolaus Tegoli*, in Modena *Flauti* usw. Alle diese Bücher wichen, wenn man von *Flauti* absieht, mehr oder weniger von der Strenge euklidischer Methode ab. Das Königreich Italien schrieb daher, sobald es definitiv konstituiert war, *Euklid* und seine Methode den Mittelschulen vor und veranlaßte die Arbeit von *Betti* und *Brioschi* 1868, die zu jener Zeit mit *Bellavitis*, *Cremona* und *Beltrami* die ersten italienischen Mathematiker waren. Aber hauptsächlich durch *Cremona* und seine Geometria projettiva von 1873 (daneben ist auch *Giorgini* zu nennen) gewann die projektive Geometrie die Universitäten und damit die Schulen, und wie überall dringt die moderne Geometrie in die Lehrbücher. *De Paolis* und *Veronese* fordern, begründen und bewähren eine fundamentale Änderung der Lehrmethode, von ersterem geht auch die „Fusion“ (s. Methodik) aus und hier haben wir die dritte Periode.

In *Veronese*'s Werk von 1897 und in *Ingrami*'s von 1900 erreicht diese Periode ihren Höhepunkt, in der die euklidische Strenge auf die moderne Auffassung der Geometrie als einen Zweig der Naturwissenschaft angewandt wurde. Das *logische* Element, bei *Veronese* fast schon übertrieben, ist gemildert bei *Enriques*. Eine Erörterung von Fragen der Elementargeometrie findet sich in dem noch oft rühmend zu erwähnenden Buche: Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900, zu dem sich unter Leitung von *F. Enriques* eine An-

zahl hervorragender Mathematiker vereinten, eine deutsche Ausgabe ist in Vorbereitung.

Titel der *ersten Periode:*

Vincenzio Flauti.

F. Cardenali, Appendice ai elementi di algebra e geometria del signore *Bossut,* Bologna 1809.

Nicolo Tegoli, Napoli.

E. Giamboni, Corso etc. 6 Bände. Torino, 4. Aufl. 1829, 3. Aufl. von *De Roux* ins Französische übersetzt.

L. Mascheroni, Problemi della geometria colle dimostrationi di *C. Sacchi* 1832.

Alessandro Casano, Elementi di geometria, Palermo 1835.

Urbano Lampredi, Tentamen di una nuova teoria delle linee perpendiculari, oblique e parallele, ediz. II, Napoli 1836.

De Calandrelli, Algebra, geometria piana e solida a trigonometria 1837.

Fortuno Padula, Raccolta di problemi della geometria risoluti con analisi algebreica, Napoli 1838, 2. ed. id. Ricerche di analisi etc. Padula hat auch zu Unterrichtsfragen Stellung genommen.

Sebastiano Vasalli, Geometria (für Kriegsakademien) 2. Aufl. Torino 1840.

Zocchi, Elementi di geometria pura con note di *A. M. Legendre,* Napoli 1841.

Gior. Codazzi, Geometria descrittiva, Torino 1842.

C. Rocco, Catechismo di matematiche pure etc. Napoli 1842.

F. de Corridi, Sezione geometrica 2. ediz. Firenze 1843.

C. Saveni, Geometria descrittiva, 2. Aufl. 1845. Roma.

Ant. Robiati, Trattato di geometria descrittiva, Milano 1845, ausführliches Werk mit 150 Tafeln.

Paolo Burzo, Nozioni teoretiche e pratiche de lungametria e planimetria, Torino 1845.

Cavaliere Ferd. de Luca, Nuovo sistema di studio geometrico analitico. Dedotto dello svolgimento successivo di una sola equazione ($c = a \cos B + b \cos A$; alle Sätze aus Legendre VII, alle Formeln beider Trigonometrien), Napoli 1847.

G. B. Marsano, Memoria sui triangli simili, Genova 1846.

C. Bravi, Filosofia di matematica, Milano 1854.

F. Brioschi, Ricerche di analisi applicata alla geometria, Roma 1853, Intorno ad alcun. teor. di geom. 1863.

Conte Giust. Bellavitis, Lezioni di geometria descrittiva, Padova 1852, 1863; ibi id. Cenni ideologici sulla matematica pura 1861; *Elementi di geometria* 1862 (*Äquipollenz*).

G. B. Marsano, Considerazioni sul triangolo rettilineo Genova 1863.

Zweite Periode.

E. Betti e Fr. Brioschi, Gli elementi d'Euclide con note, aggiunte e esercizii etc. Firenze 1866 (Le Monnier) fortwährend neu aufgelegt, zuletzt 1899.

A. Sannia e d'Ovidio, Elementi della geometria, Napoli 1869, 2. ediz. 1871, sehr ausführliches Referat von *Hoüel,* Nouvelles annales 1871, p. 289, 9. ediz.

Napoli 1895. Die aufeinander folgenden Ausgaben von *Sannia e d'Ovidio* und von *Faifofer* zeigen am deutlichsten die Fortschritte der Elementargeometrie.

G. Bellavitis: Applicazione della geometria descrittiva 1869.

D. Besso (Gründer des „*Periodico*“ 1885) *Littrow*'s Geometria populare.

G. Peri, Elementi di geometria descrittiva 1869.

Mazzola, Elementi di geometria (für technische [Real-] Schulen) 1869.

E. Beltrami, Saggio d'interpretazione della geometria Non-Euclidea. Giorn. di Mat. 6 (1868) (vgl. nicht-euklidische Geometrie).

Clairaut, Eléments de géométrie, italienisch 1870, dito 1879.

A. Massimino, Sugli elementi di geometria d'Euclide (*Lobatschefskij*) 1870.

V. Sabato, Elementi di geometria 1870; id. Problemi geometricie, Lecce 1869.

L. Vittore, Elementi di geometria, Torino 1870, 2. Aufl. 1878.

P. Cassani, Geometria rigorosa Venezia 1872.

L. Cremona, Elementi di geometria projettiva Torino 1873; id. hat 1865 *R. Baltzer*'s Elemente ins Italienische übersetzt.

V. Vercelli, Elementi di geometria (der *Kambly* Italiens) 5. Aufl. 1870; 7. Aufl. 1872; 10. Aufl. 1876; 13. Aufl. 1879.

A. Bachelet, Note di geometria elementare, Torino 1875; 5. Aufl. 1876.

G. A. Boidi, Manuale di *disegno* geometrico lineare; 9. Aufl. Torino 1875; 10. Aufl. 1875; 36. Aufl. 1898. *Boidi* hat viele Schriften, und alle erfolgreich, über geometrisches und anderes Zeichnen verfaßt und ist Autorität auf diesem Gebiete.

P. Fulcheris, Trattato elementare di geometria piana, Torino 1875; 2. Aufl. 1878 für Realschulen, 17. Aufl. 1899.

Aur. Faifofer, Elementi di geometria, Venezia 1878; Die Bücher von *Faifofer* für Realschulen, Gymnasien (Lyzeen) haben sehr viele Auflagen, seine Geometria intuitiva (für technische und normale Schulen) hat 1899 die 31. Aufl.; seine ebene Trigonometrie 1899 die 11. Aufl.

V. Sabato, Le congruenze 1878.

D. Besso, Elementi di trigonometria piana Torino 1880.

E. Bertini e O. Tagnoli, Euclide V und VII Torino 1880, IV, V und VI 1884 (V von *Bertini*).

A. D. Zolt, Principii della uguaglianza di poligoni etc. 1881 Milano, 46 p.; di poliedri e di poligoni sferici 1883, s. *Inhalt.*

S. Pincherle, Geometria pura elementare 1881 (kurzer Leitfaden), 4. Aufl. 1895, Sammlung *Hoepli* (billig und praktisch); Geometria metrica e trigonometria, 4. Aufl. 1895.

F. Aschieri, Geometria projettiva e descrittiva 1883; 2. Aufl. 1892; Lezioni di geometria descrittiva 1895.

G. B. Antonelli el Lazzeri, Geometria intuitiva Firenze 1883.

Dritte Periode.

R. de Paolis, Elementi di geometria, Torino 1884; epochemachendes Buch, Axiome, Fusion, für Lehrer bestimmt; id. Sui fondamenti della geometria projettiva, Roma 1887.

G. Peano, Torino 1889. I principii di geometria logicamente esposti.

Nicod. Bemporad, Euclide (libri I—VI messi sott *altera* forma), 2. Aufl. 1886; 3. Aufl. 1891.

E. d'Ovidio, Euclide I e II 1889; Euclide I accommodato per i ginnasi.

G. M. Testi, Corso di mat. spec. per gli istituti tecnici, Torino 1890, 2. Aufl. (510 esercizii) 1897; 3. Aufl. 1899.

R. Bettazzi, Teoria delle grandezze, 1890 Pisa; La risoluzione dei probl. numerici e geometrici, Torino 1893.

F. Giudice, Trigonometria rettilinea, Torino 1889; Geometria piana, Brescia 1890, solida 1891. *Geom. piana 1897, Palermó,* eigenartige Behandlung der Flächenvergleichung.

G. Lazzeri e A. Bassani, Elementi di geometria Livorno 1891, die Gedanken *de Paolis*' für die Schule fruchtbar machend; 2. Aufl. 1898.

G. Riboni, Elementi di geom. (mit gegen 6000 Aufgaben) 1892.

J. Camelotti, Geometria pura elementare esplicata per dualità (Fusion) Torino 1893—1899.

O. Faciola, Elem. di geom. le proprietà dei triangoli e paralleli sulla *independenza* di loro *postulato,* Messina 1894.

G. Scoto, La misurazione delle grandezze grafiche Livorno 1895.

S. Pincherle, Esercizi di geometria element. Milano 1897.

G. Veronese e *P. Gazzaniga,* Elem. di geom., autogr. Padova 1895; im Anschluß an die „*Fondamenti*" Veronese's von 1891, deutsch von 1894 von *Schepp* (s. Methode).

Veronese, Elem. di. geom. 1897, Padova, Druck des vorigen, mit Beihilfe von *P. Gazzaniga* (s. Methode).

Mich. Gremigni, Gli elementi d'Euclide, Roma 1897; B. I, Firenze 1899.

F. Enriques, Lezioni di geom. projettiva, Bologna 1898 (für Lehrer.) Deutsch von *H. Fleischer,* Leipz. 1903, verbessert von *E.* selbst und *Fleischer.*

G. Ingrami, Elem. di geom. per le scuole secondarie superiori, Bologna 1899, auf gleicher Höhe wie *Veronese,* schon vieles von *Hilbert*'s Grundlagen enthaltend.

E. Bagnoli, Geom. rettilinea e curvilinea trattata con metodo *preeuclidico* etc., Roma 1900 (ähnlich wie *Hübner,* die Rechnung als die ursprüngliche Mathematik betrachtet).

Enriques ed Amaldi, Element. di Geom. 1903, ein für Mittelschulen außerordentlich brauchbares Buch, dessen Übersetzung sehr nützlich wäre; vgl. auch das Referat von *Vailati* im Bullet. di bibliogr. 1904.

Übrige Länder.

Zeit- und Raummangel zwingt mich, die übrigen Länder summarisch zu behandeln und die Ausfüllung der Lücken der Korrespondenz im Archiv der Math. u. Phys. zu überlassen.

In Spanien erlebte die Mathematik ihre Blüte im Mittelalter auf den arabischen Universitäten und bei den spanischen Juden *Ibrahim Ibn Esra, Gerson ben Levy* etc. Dann sank der Kulturzustand des Landes. Im 18. Jahrhundert war die höhere Schule ganz in den Händen der Geistlichkeit, besonders der Jesuiten; lateinische Euklid-Ausgaben und die spanische der 8 geometrischen Bücher von *Jac. Kresa, Brüssel*

1689 waren im Gebrauch und vorher *Jos. Zaragoza*, Eucl. singulari methodo illustr. (spanisch), Valentia 1673.

Die erste Nummer des Enseignement *Laisant*'s vom 15. Jan. 1899 enthält von der berufensten Hand, von *Z. G. de Galdeano (Saragossa)*, einen Bericht über das Aufblühen der Mathematik in Spanien, etwa von 1865 an. *Galdeano* hat für Spanien etwa die Bedeutung, die *Teixeira* für Portugal hat. Demnach war die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts im wesentlichen von Übersetzungen aus dem Französischen beherrscht, *Legendre*, *Lacroix*, *Vincent*, *Lefebure de Fourcy* etc., aber auch die Géométrie descriptive von *Monge* wurde spanisch.

Die ersten selbständigen Lehrbücher sind wohl die von *Juan Cortazar* (Madrid).

Um 1865, also zeitlich ungefähr zusammentreffend mit *Hamilton*, *Bellavitis*, *Graßmann*, *Möbius*, gab *Rey y Heredia* (y ist = und, der zweite Name, wie in der Schweiz und Süddeutschland, der Familienname der Frau) eine geometrische Interpretation der imaginären Zahlen, also Richtung und Länge zusammenfassend. Beeinflußt ist das Werk von *Kant* und *Wronski*.

Unter dem Einfluß von *Rey* steht die Geometría elemental von *Luciano Navarro*. Der große spanische Dichter, der Verfasser des Gran Galeotto, *José Echegaray*, führt dann in seiner *Introductión á la geometría superior* die Lehrerwelt in die projektive Geometrie nach *Chasles* ein und *Galdeano* selbst gab eine Geometría elemental, die schon die Porismen *Euklid*'s, die Lemmata *Pappus*', und einen großen Teil des Materials von *Rouché et Comberousse* verarbeitet und die 1888 sehr erheblich in der Richtung der modernen Geometrie erweitert wurde.

Juan Just. Garcia, Elementos de aritmética, algebra y geometría, 5. Aufl. Madrid 1821.

V. Romagnolo, Manuale de geometria, Tortona 1823.

J. M. Vallejo, Compend. de matemát. puras y mistas, 4. Aufl. correg. e aument. con cuantos descubrimientos etc. Madrid 1841. id. Tratado elem. de matemáticas escrito de orden. de *S. M.* para uso de los caballeros semin. del seminar. de *nobles* de Madrid y demas casas de educación del reino I 1, 2 geomet. trigon. plana y geom. pratica, Madrid 1823; II 1 Trigon. *esferica*, aplic. de la algeb. a la geomet., secciones conicas etc. Madrid 1817 (III. Aufl. 1841).

M. Salavera, Complemento elemental de gemetría y trigonometría rectilinea Tarragona 1892.

J. Nunez de Arenas, Catecism. de algeb. elem. 1843.

Baldom. Perejon, Observ. sobre la *enseñanza* de la geom. comb. con el *dilujo* lineal; Madrid 1845.

Juan Cortázar, Trat. d. Geom. elem. Madrid 5. Aufl. 1850, *13*. Aufl. 1866.

Z. G. de Galdeano, Estudios criticos sobra la generación de los conceptos mat. 27. La evolución de la geom. Euclid. hasta los tempos modernos,

Madrid 1870; s. a. Methodik; 1882, 1. Aufl. der *Geomet. elem.*, 1884, 1888 („Fusion", aber nicht völlig durchgeführt). *id. 1892 Teor., probl. y metodos geom.*

Viel geringeren wissenschaftlichen Wert hat nach *Loria* (Della varia fortuna di Euclide) die portugiesische Elementarmathematik von:

J. A. Serrasqueiro, Tratado de geom. elem. *7. Aufl.* Coïmbra 1899.

Luciano Navarro, Geom. elem. 1874, Salamanca.

A. R. de Prada, Elementos de matem. 2. Aufl. Madrid 1896.

A. Moya, Elements de matem. 4. Aufl. Madrid 1898.

Portugal.

R. Guimarães zählt in seinem Buche „Les mathématiques en Portugal au XIX[e] siècle. Aperçu historique et bibliographique". Coimbre 1900 folgende Lehrbücher der Elementargeometrie auf:

J. M. Abreu, Supplément à la traduction de la géométrie d'Euclide de Mr. *Peyraud,* et à la géométrie de Mr. *Legendre,* suivi d'un essai sur la vraie théorie des parallèles, 1809.

J. Felix Pereira, Elementos de geometria. Lisboa 1854.

R. R. de Souza Pinto e *F. de Castro Freire.* Geometria elementar theorica e pratica. Coimbra 1856.

J. M. Couceiro da Costa, Tratado de geometria elementar. Lisboa, 1868.

F. Villela Barboza, Elementos de geometria. Lisboa 1870 (plusieurs éditions).

J. M. Couceiro da Costa, Applicação da geometria elementar. Lisboa 1870.

Zeferino Candido, Elementos de geometria. Coimbra 1877.

A. A. da Pina Vidal e *C. A. Moraes d'Almeida,* Elem. de geom. plana, Elementos de geometria no espação. Lisboa (plusieurs éditions).

A. A. da Pina Vidal e *C. A. Moraes d'Almeida,* Appendice aos elementos de geometria. Lisboa 1881.

J. A. Serrasqueiro, Tratado de geometria elementar. Coimbra (plusieurs éditions).

J. A. Bonifacio, Geometria elementar plana e no espaço. Porto 1882.

J. F. d'Avillez, Questões de mathematica. Lisboa 1889.

C. Gomes Villas-Boas, Elementos de geometria, trigonometria rectlinea e spherica. Lisboa 1824.

C. Gomes Villas-Boas, Geometria e mecanica applicadas ás artes, ou tratado elementar d'estas sciencias (extrahido do curso normal do barão *Charles Dupin*). Lisboa 1837.

Für *Belgien* ist im wesentlichen die französische Sprache und Literatur maßgebend, *Catalan* ist dort schon aufgeführt; *Neuberg* und *Mansion*, soviel sie auch zur Entwicklung des Sekundärunterrichts besonders durch die *Mathesis* seit 1880 beigetragen, haben leider kein Lehrbuch der Elementargeometrie geschrieben. Zu nennen sind vor allem:

P. Brasseur, Géom. élém. plane, 1. Aufl. 1885, 6. Aufl. 1899 und

A. Cambier (Inspecteur général honoraire de l'enseignement moyen), der *Blanchet* in der Bearbeitung des *Euklid* abgelöst hat. Interessant ist, wie auch

in Belgien die Anwendung und die Rücksicht auf die Praxis in den Mittelschulen zunimmt. Die 3. Aufl. des mit Anwendungen und Änderungen edierten *Legendre* von 1880 hat mehr als 800, die 5. Aufl. von 1899 schon mehr als 1000 Aufgaben. *Cambier*'s eigene *Géom. élém.* à l'usage des écoles moyennes avec un traité d'arpentage (Feldmessung) 1880, 1887 id. avec de nombreuses *applications*, 1900 avec de nombreuses applicat. et un traité d'arpentage et de *nivellement*. (Bruxelles.)

Ich nenne noch:

De Wasteels 1899, der sich im Bourget und der Mathesis als tüchtiger Elementarmathematiker erwies: Grondbeginselen en beschrijvende Meetkunde (Gent) und *Cambier*, Leçon de *trigonométrie* rectiligne et sphérique, 2. Aufl. 1870.

Ed. Linglin, Géom. plane 1880.

Aug. Poulain 1875 und

H. Vuibert (Journal de V!), Questions de mathématiques élém., Bruxelles 1879.

Für industrielle Schulen ist ein „Cours" von *Henri Postula* (autographiert) zu nennen und für *Fröbel*'sche Kindergärtnerinnen: *Maréchal*, Leç. sur les formes géométr.

In Dänemark scheint mit *Lindrup* 1803 (die ersten VI Bücher) *Euklid* schon verlassen zu sein, für die Wende des Jahrhunderts ist *Bugge, Thom.* zu nennen, dann

H. O. Bjorn, Laereb. i Geometri, Odense, 3. Aufl. 1834, 4. Aufl. 1854.

C. Rasmus, Elementar geometri 1850.

J. Oppermann, Elementar plangeometri 1834 und vor allem bis etwa 1880.

C. E. Mundt, Elemente, 3. Aufl. 1858, 10. Aufl. 1879; 1869 auch schwedisch von *J. E. Bergroth* bearbeitet; seit 1880 herrscht:

Julius Petersen, der auch der deutschen Literatur angehört; seine Plangeometrie hatte 1902 die 2. Aufl., die Stereometrie die 4. Aufl., die Geometrie die 6. Aufl., Methoden und Theorien die 4. Aufl., die Trigonometrie die 5. Aufl.

Für Aufgaben noch *Buchwald og Sternberg*, Plangeometriske Konstruktioner I, 4. Aufl. 1892; II, 3. Aufl. Dann für zeichnende Geometrie

Hetsch og Ursin, Geometriscke Tegnelaere, 5. Aufl. 1882; (*Ursin* hat 1828 für Handwerker und Künstler eine Geometrie verfaßt und 1828 mit *Hetsch* für Kunst- und Handwerksschüler) und für deskriptive und projektive Geometrie:

C. Seidelin, Descr. Geom. 1873, Element. Laere i Project. 1871.

Schweden hat, soweit ich es beurteilen konnte, am treuesten am *Euklid* festgehalten. Die acht geometrischen Bücher sind in der Bearbeitung von

Mårten Strömer, De sex första jemte e elfte och tolfte böckerna af Euclidis elementa eller grundeliga inledning till geometrien „für die Jugend" noch 1846 abgedruckt, dann ist diese von *P. V. Bergstrand* ediert seit 1841; 13. Aufl. 1874; 14. Aufl. 1879. Ferner die acht geometrischen Bücher von:

H. A. Vitt & M. E. Areskong, elementa geometriae med., Malmö, 1. Aufl. 1850; 2. Aufl. 1856.

H. Falk, Stockholm 1836.

C. A. Weststöm, Lärobok i geometrie, omfatande de sex första bökerna i Euclider, Stockholm 1867 und 1871, 2 Tle. (die sechs ersten Bücher) 1861 und 1871. Sehr häufig wurde das schwierige V. Buch bearbeitet.

P. R. Bråkenhjelm, Proportionläran efter Euclid, Stockholm 1852.

P. N. Ekmann, Proportionslära med förkl. (Erklärungen). 5. uppl. 1875 (1. Aufl. 1840). V. Buch, 1. Aufl. 1875. Stockholm.

F. W. Hultman, 1873, 2. Aufl. 1876. Stockholm.

Y. Nyberg, 2. Aufl. Norrk. 1874.

Dillner, V. und VI. Buch etc.

Aber auch *Legendre* drang nach Schweden, Übersetzung von *E. Harfvefeld* 1833 und später von

Neovius, 1. Aufl. 1867; 2. Aufl. 1876.

Als Verfasser selbständiger Lehrbücher der Elementargeometrie führe ich an:

P. E. Cronhjelm, Elementerna af arithmetiken och planimetrien, 1 uppl. Stockholm 1829, 2 uppl. Kristianstad 1834, 3 uppl. (*Tilljander*) 1844, 4 uppl. Sölvesborg 1852, (5. Aufl. von *C. G. W. Hjort*) 1859. 7. uppl. Kristianstadt 1873 von *O. C. Sylvan*.

P. N. Ekmann, Element. af plana Trigonometrien. 1. Aufl. 1841; 3. Aufl. Stockholm 1860; fullständing lärobok i Elementargeometrien, Stockholm 1852; o fringar i linearteckning på frihand, 1. Aufl. 1847; 3. Aufl. 1863. Stockholm.

C. J. L. Almquist, Lärobok i Geometrien mit *deskriptiver* Geometrie 1842. 1. Aufl. 1833; 4. Aufl. 1853 (Norrköpnig.)

O. C. Sylvan, Elementerna i geometri (I. Planimetri.) Kristianstad 1866.

H. Falck, Practik Lärobok i Geom. och Trigon. (Upsala 1831.)

Ernst Bonsdorff (finnisch, dann schwedisch übersetzt) Elementerna i Geom. 1884, 1886. Derselbe: Sammlung geometrischer *Probleme* 1877.

Bedeutenden Erfolg hat auch das Lärob. i Geom. von

P. A. Siljeström, Lärsbok i geometrien till folkokolornas, Stockholm, 6. Aufl. 1888.

J. W. Hultman, Sammlung von Examensaufgaben von 1864—79; nach seinem Tode von *J. E. Cederblom* Stockholm 1880 publiziert.

C. L. A. Kuntze, 1872, Geometrische Aufgaben zum *Zeitvertreib* etc.

B. A. Nyberg, Om Behandl. af geom. öffningscypgifter, Borgå 1880.

A. J. S. Lagerheim, Stockholm 1881, Satser ur plangeom.

A. Lombolt, mat. Opgaver. 5. Aufl. 1895.

Ad. Markman, Lärob. i *beskrifvande* geom. Malmö 1880.

Ich nenne noch *Jochnick* (Aufgaben), *Söderblom*, *Wiemer*. Eine moderne Wendung findet mit *Laurin* (projekt. Geometrie) statt, nachdem die Regierung *E. Lundberg* auf eine Studienreise nach dem Kontinent gesandt hatte, wo ich Gelegenheit fand, ihn kennen zu lernen.

P. G. Laurin, Lärobok i Geom. 1. Aufl. Lund 1890; 2. Aufl. 1894.

Aus Norwegen, dem Lande *Abel*'s und *Sophus Lie*'s, führe ich nur an:

Broch (Ole, Jakob), Den deskriptive Geometries Elementen, Christiania 1847; 2. Aufl. 1861; Plangeom. 1855, 3. Aufl. 1863; Trigonom. 1851, 2. Aufl. 1864. *Broch* ist durch mehrere Arbeiten im *Crelle* (Ellipse aus ein Paar konjugierten Durchmessern), sowie in *Dove*'s Repertorium auch in Deutschland bekannt und war von 1879 bis 1889 „chef du bureau international des poids et mesures" in Sèvres.

B. Holmboe, Abel's Lehrer und väterlicher Freund, Lärob. i Mathem. 2 Teile, Geometrie Kristiania 1827, 3. und 4. Aufl. von *J. Odèn*1851, 57; Stereometrie 1853; von *O. A. Bjerknes* 1859.

Ich nenne noch *C. M. Guldberg* als Verfasser erfolgreicher Lehrbücher, insbesondere für Stereometrie.

Aus *Holland* nenne ich zwei Elementarmathematiker ersten Ranges:

J. H. van Swinden und *J. de Gelder,* beide aus dem Anfange des Jahrhunderts. Die letzte Euklid-Ausgabe ist die 5. Aufl. von *Steenstra* von 1825.

J. H. van Swinden, Theor. geom. accedunt probl. geom. libri quinque, Amsterdam 1781. Grondbeginselen der Meetkunde 1790, schon 1797 von *C. Gaeb* deutsch (Jena), vgl. *Jacobi* 1834, 2. verbesserte en vel *verm.* Oplage (*J. Oomkens*) 1833. Traité de géom. théor. e prat. 1806 etc. Analyse: Correspondance Quetelet I—II; von *Verdam.*

J. de Gelder, Beginsels der Meetkunde. Amsterdam 1810, 2. Aufl. 1817, Handleiding tot te beschouvende en werkdadige Meetkunst. Amsterdam 1806, neue Auflagen der Beginsels 1850, 1862, auch *deutsch übersetzt.*

R. Lobatto, Leerboek der regtlijnigen en spher. driehoekmeeting 1843.

G. J. Kapteyn, Oefeningen etc. 1853 (Militärakademien).

W. Schwertzel, Jets ov. het bepalen van den cirkel door punten, raaklijnen en rakende cirkels 1853. (Taktionsproblem.)

Buys Ballot, Begins. en gronden der Meetkunde, 1. Aufl. Utrecht 1852 (2. Aufl. Trigonometrie 1856), 3. Aufl. 1860.

Sehr verbreitet ist *J. Versluys,* Begins. der nieuwere Meetk. Gron 1868, 71, 79, 90, 99; Handboek der Meetk. 1892, 1897 etc. Beknoptes etc. (kurz gefaßtes Lehrbuch der Stereometrie) 1899.

G. A. Vorsterman van Oyen (Verfasser von *„100 Schulmeister 99 Gecken"*). Handboek voor de theorie en praktiijk der Meetk. Schoonh. 1873—77.

B. L. Vries, Goniometrie und Trigonometrie 1875, oft aufgelegt.

Jan de Vries und *W. H. L. Janssen v. Raay,* Leerboek der vlakke meetk 1893.

Bierens de Haan, Overzicht der goniometrie en der vlakke Driehoeksmeting, Leiden 1869.

J. van Loghem, 1000 Oefeningen (Übungen) v. Driehoeksm. en lichaams (körperliche) Meeting Sneek. 1874.

P. Molenbroek, Leerboek der Meetk. Leiden 1896.

Außerdem sind entsprechend der geographischen Lage sowohl die französischen Lehrbücher (*Legendre, Lacroix, Compagnon* etc.) als die deutschen (*Schlömilch, Adam*'s Transversalen, *Koppe, Wiegand* etc.) ins Holländische übersetzt.

Ungarn.

Wolfgang Bolyai, Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos etc. introducendi; der 3. Appendix ist der Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc. von ***Johann Bolyai;*** eine neue Auflage des Tentamen ist im Auftrage der ungarischen Akademie erster Band von *Julius König* und *Moritz Réthy* 1897, zweiter und dritter Band von *J. Kürschák, M. Réthy, Béla Tötössy de Zepethnek* 1904 in prächtiger Ausstattung herausgegeben.

Polen und Rußland, Slaven.

Polen: Czecha, Euklid 1817. *Legendre* und *Lacroix* (Dabrowskiego Warschau 1821) werden früh übersetzt.

Wronski (s. Methode).

G. H. Niewenglowski (Paris 1855), Ein polnisches Lehrbuch der Elementargeometrie; nach der Inhaltsangabe von Terquem 1856, Nouvelles annales p. 14 ein gutes Buch. Aus neuerer Zeit:

W. Hertz 1883 und besonders die Lehrbücher von

S. Dickstein (Warschau.) 2. Aufl. 1883.

J. Badowski, Elementargeometrie, Warschau 1894 von *Dickstein* gelobt.

Bulgarisch: A. Soureck Filipopel 1883 von *Studnička* gelobt.

Böhmisch: A. Strnad, Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien; Prag 1898, von *Studnička* sehr gelobt;

und die Bücher von *Noca.*

Rußland: Suvoroff, Euklid Ausgabe 1789 nach dem griechischen Text und

Waschtschenko-Zakhartschenko 1880 mit Bibliographie von 1481—1879. Die verbreitetsten Lehrbücher sind (nach *Loria* l. c.) die von

Davidoff, 6. Aufl. Moskau 1893 und als Ergänzung die von *Waschtschenko.* Schon 1836 wurde von

Perevontschikoff im Auftrag der Verwaltung ein Lehrbuch der Elementargeometrie verfaßt.

P. A. Nekrassow, Allgemeine Methoden der Auflösung geometrischer Konstruktionen, 2. Aufl. 1896.

J. A. Alexandroff (nach der 6. Aufl. von *D. Aitoff* 1898 ins Französische übersetzt, 1903 deutsch bei *Teubner*); ein Werk ähnlich wie *Petersen*'s Methoden und Theorien.

Griechenland vertauschte in der Mitte des Jahrhunderts die Stoicheia des großen *Euklid* gegen *Lakōn*'s, mir liegt eine Ausgabe von 1870 vor, die stark vom *Euklid* abweicht. Im Jahre 1884 (*Loria* l. c.) schrieb die Regierung einen Wettbewerb aus, in dem der bekannte Mathematiker *Hazzidakis* Sieger blieb. Wer in dem neuen Kampf um einen vollständigen Abriß der Elementarmathematik Sieger geworden, weiß ich nicht.

II. Spezielles.

A. Parallelentheorie.

5. Beweis des Parallelenaxioms. Aus *Proklos* wissen wir, daß die Parallelentheorie *Euklid's* von Anfang an Widerspruch gefunden und Verbesserungsversuche, z. B. von *Ptolemäos* und *Geminus* erfahren hat. *Riccardi* zählt in den Memorie di Bologna, Serie V, Bd.1, 1890 auf 20 Quartseiten Monographien über die „5. Forderung“ (11. Axiom) des *Euklid* auf von *Cataldi* 1603 bis *Tannery* 1887. Aber noch aus 1891 sind uns drei neue Versuche bekannt, die Parallelentheorie des *Euklid* mit Ausschluß der 5. Forderung zu beweisen, ein Jahrhundert, nachdem *Gauß* die nichteuklidische Geometrie begründet hat. Vergl. hierzu *Bonola*, Index operum ad geometriam absolutam spectantium, Literatur von 1839 bis 1902. Vielleicht überzeugt die Versinnlichung der nicht-euklidischen Geometrie durch die Geometrie des Kugelgebüsches von *Wellstein* (2. Band der Enzyklopädie der Elementarmathematik von *Weber* und *Wellstein*) bezw. *F. Klein* die Gymnasiallehrer von der Widerspruchslosigkeit der nicht-euklidischen Geometrie und damit von der Unmöglichkeit, die Parallelentheorie ohne eigenes Axiom zu begründen.

Bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts sind es ganz besonders die Jesuiten, die sich mit den Grundlagen der Geometrie erfolgreich beschäftigt haben, und auch auf ihren Lehranstalten gerade dieser Seite der Elementargeometrie große Beachtung schenkten, ich nenne nur: *Clavius, Pelletarius, Ceva, Grünberger, Saccheri, Bolzano.*

Um die Wende des Jahrhunderts bringt dann *Legendre*, „der zweite *Euklides*“, durch seine Éléments von 1794 die Parallelenfrage in Fluß, ob er nun durch den Gegensatz zu den Jesuiten, oder durch *d'Alembert's* Mélanges angeregt ist, bleibe dahingestellt. In den verschiedenen Ausgaben, besonders in der dritten von 1800 und der zwölften von 1823, die er wohl als sein letztes Wort ansah, behandelte er die Parallelentheorie immer aufs neue, und über ein Menschenalter hat er an der Parallelentheorie gearbeitet. Auffallend ist, daß er mit dem Begriff des mathematischen Unendlichen so wenig vertraut ist, daß er trotz der vorzüglichen Kritik *Stein's* (s. u.) die Schwäche seiner Beweise nicht anerkennt, sondern die Abänderungen nur als Vereinfachungen gibt; daß er die Schwäche aber vielleicht doch gefühlt, kann daraus vermutet werden, daß er in der 9. bis 11. Aufl. im wesent-

lichen zu *Euklid* zurückgekehrt ist. Es ist *Legendre*'s bleibendes Verdienst, das er allerdings mit *Saccheri* und *Lambert* teilt, den Zusammenhang der Parallelentheorie mit der Winkelsumme des Dreiecks der Menge der Mathematiker ins Bewußtsein gebracht zu haben. Freilich steht das schon klar und deutlich bei *Proklos;* aber der war damals so rar, daß *Castillon* noch 1792 (Berliner Memoiren) sich kein Exemplar verschaffen konnte.

Legendre gibt über seine Arbeiten Rechenschaft in den noch heute höchst lesenswerten „Réflexions" (Mémoires de l'Institut T. XII, 1833, p. 367). Er beginnt mit dem Satze der 3. Aufl. 1800, Note 2: Die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks kann nicht größer werden als zwei Rechte. Der Beweis ist von *Lobatschefskij* in den geometrischen Untersuchungen wesentlich vereinfacht; *Legendre* (und *Lobatschefskij*) setzen dabei stillschweigend die Unendlichkeit der Geraden und das *Archimed*ische Axiom voraus. Ganz besonders einleuchtend erscheint der Beweis der 12. Aufl. Er beweist, daß ohne Änderung der Summe der Dreieckswinkel zwei Winkel zu 0 herabgedrückt werden können, um daraus zu schließen, es müsse der dritte Winkel gleich zwei Rechten sein. Da *Legendre* sicher die *Gergonne*schen Annalen las, so ist nur anzunehmen, daß er die Kritik *Stein*'s (*Gergonne*'s Ann. XVI) nicht verstanden hat. *Stein* weist auf das einfachste nach, daß, wenn ein Winkel fortgesetzt halbiert wird, jeder beliebige Punkt auf dem veränderlichen Schenkel jeden beliebigen Abstand vom andern beibehalten kann.

Zum Schluß geht *Legendre* auf den *Bertrand*schen Beweis ein, wonach ein Winkel, da er ein angebbares Verhältnis zur Ebene hat, nicht in einem Streifen enthalten sein könne. (*Bertrand*, Développement nouveau de la partie élémentaire des math. Génève 1778, t. II. p. 19.)

Die Irrtümer *Bertrand*'s, *Legendre*'s, *Gergonne*'s, *Servois*' und so zahlloser Mathematiker finden ihre Erklärung dadurch, daß erst durch *Bernhard Bolzano*'s Paradoxien des Unendlichen 1837 der Grenzbegriff „unendlich" seine Aufhellung fand. Wie langsam übrigens die Aufklärung geht, kann man z. B. aus dem *Lübsen*schen „Beweis!" des *Euklid*schen Axioms (16. Aufl. p. 37, 1871) oder aus dem *Lorberg*schen von *1892* sehen. Dagegen hat z. B. *Stein* schon (*Gergonne*'s Ann. XV und XVI) vollkommen klaren Einblick, daß es auf den Werdeprozeß ankommt, und wenn er es auch nicht ausspricht, er weiß es, daß die gewöhnlichen Rechnungsregeln versagen und insbesondere die Beziehungen Teil — Ganzes und Größer — Kleiner auseinanderfallen.

Die Arbeit *Legendre*'s ist eine wunderbare Mischung von Scharf-

sinn und Naivität. Scharfsinn z. B. beim Beweis des Satzes über die obere Grenze der Winkelsumme S, beim Beweis, daß, wenn ein einziges Dreieck existiert, in dem $S = 2$ Rechten, dann in jedem Dreieck $S = 2$ Rechten ist; Scharfsinn, wenn er bemerkt, daß der Satz: die Winkelsumme ist kleiner als zwei Rechte, ein absolutes Längenmaß voraus setzt, wie der entsprechende sphärische den Kugelradius. Dieser Vergleich findet sich im Manuel von *Terquem*, 12. édit. Paris 1838, Note 1, aus der auch folgt, daß der erwähnte Satz *Legendre* wie *Terquem* schon 1808 bekannt war, allerdings *Saccheri* und in allgemeiner Form schon erheblich früher, während *Lobatschefskij* und *Bolyai* später sind. Naiv ist die Voraussetzung des *Pythagoras* und des ebenen Cosinussatz beim analytischen Beweis der 12. Edition. Trotz *Legendre*'s Überzeugung von der Strenge zweier seiner Beweise kehren die Bearbeiter *Legendre*'s *Blanchet* 1845 und die Nachfolger (*Rouché* und *Comberousse*) zur *Euklid*schen Parallelentheorie zurück.

Nächst *Legendre* habe ich den Essai sur la théorie des parallèles von *Gergonne (Servois)* zu erwähnen (*Gerg.* III, p. 353; 1813), in dem sich der oft wiederholte Beweis findet, der die Fläche des Dreiecks gegen die Halbebene $2D$ vernachlässigt (Kritik: *M. Simon*, Zu den Grundlagen etc. Programm Straßburg 1890) und der fehlerhafte Grenzbegriff einer letzten Schneidenden.*)

Sehr viele Anhänger hat der *Thibaut*sche Beweis gefunden (Grundriß der reinen Mathematik zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen 2. Aufl. 1809). In der ersten Auflage von 1801 fehlt der Beweis, erst später wurde *Thibaut* durch *Legendre* zu der Änderung der Parallelentheorie bewogen.

Der *Thibaut*sche Beweis enthält (implicite) das Axiom: Richtungsänderung wird durch Fortschreiten in derselben Richtung nicht beeinflußt; er hat seine völlig zutreffende Kritik in dem *Programm von Siegm. Günther:* „Der *Thibaut*sche Beweis für das 11. Axiom historisch und kritisch erörtert.“ Ansbach 1877 gefunden. *Günther* weist nach, daß der Beweis die Umkehrbarkeit der Geraden und den Satz: „Parallele zwischen Parallelen sind gleich“ erfordert. *Günther* selbst glaubte an die Möglichkeit, die Parallelentheorie durch stereometrische Betrachtung zu beweisen (*Battaglini* 14 (1876), p. 97).

Die Definition paralleler Geraden ist schwankend. *Legendre* samt *Blanchet* und *Cambier*, *Rouché* und wohl die meisten Autoren seit 1860 sind zum *Euklid* zurückgekehrt, aber z. B. *Knar* 1829 hat noch die Abstandslinie. Von *Clavius* bis *Legendre* exkl. überwiegt die Auffassung

*) Der Beweis steht schon bei *Bertrand*, [illegible]

der Parallelen als Linien gleichen Abstands; *Pestalozzi* im ABC der Anschauung hält dies für ganz selbstverständlich. Dieselbe Auffassung findet sich freilich in so erfolgreichen Werken wie in *Chr. von Wolff's* *Initia* und *Clairaut's* Éléments von 1741.

Eigentlich aber schon bei *Proklos*, bezw. *Posidonios*. Auf *Proklos* geht die jetzt in den deutschen Lehrbüchern am häufigsten gebrauchte Fassung des Parallelenaxioms: „Durch einen Punkt läßt sich zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen", zurück. Bei dem Beweise dieses Satzes durch *Proklos* (*Friedlein* p. 372) kann man so recht sehen, welchen Schaden das Durcheinandergehen beider Auffassungen bringt.

Van Swinden-Jacobi und *Baltzer* definieren Parallele als Gerade, die von einer dritten unter Ergänzungswinkeln von 180° Grad geschnitten werden, was *Legendre* in der Note unterm Strich im Mémoire vom 10. Januar 1833 vorschlägt.

Leider ist aber auch die Definition der Parallelen als Linien gleicher Richtung samt dem „Beweis" des Parallelenaxioms, I 29: Linien gleicher Richtung haben mit jeder dritten gleiche Richtungsunterschiede unausrottbar, z. B. *Lorberg* 1892. Die euklidische Definition hat den Vorteil, daß sie das asymptotische Element, das in der Natur der Parallelen liegt, in den Vordergrund stellt.

Verbreitet ist auch der Irrtum, die Einführung des unendlich fernen Punktes und damit der Definition: „Parallele Geraden sind solche, welche den unendlich fernen Punkt gemeinsam haben", rühre von *Jakob Steiner* her. Er ist aber bei *Kepler* 1604 (Frisch II, p. 185) eine „façon de parler", bei *Desargues* (Brouillon project. 1639, Ausgabe von *Poudra* I, p. 104) ein unzugänglicher Punkt, welche Auffassung *Newton* (Scholium zu Lemma 18, Philos. natur. V, 1687) teilt. Bei *Steiner* ist er eine Richtung (System. Entwicklung, Kap. I, 52, 1832), bei *Reye* ein uneigentlicher (adjungierter) Punkt.

Hier müßte eigentlich auch über die Gerade und den Winkel gesprochen werden, doch verweise ich auf *Enriques*. Ich bemerke nur, daß die psychologische Erzeugung der Geraden aus dem Beziehungsbegriffe rechts und links an sich die drei Auffassungen: in sich zurücklaufend, im Unendlichen geschlossen, im Unendlichen nicht geschlossen, ganz gleichberechtigt nebeneinander setzt.*) Nur die Erfahrungstatsache, daß wir auf schon konstruierte Punkte bei der Verlängerung nicht zurückkehren, gibt idealisiert den Begriff der Unendlichkeit der Geraden. Für die faktische Verbindung zweier sehr entfernten Punkte

*) *Hilbert* hat die Unendlichkeit der Geraden ersetzt durch das Axiom II, 3, was aber die gewisse Beziehung „zwischen" sei, bleibt ungewiß.

sind wir nicht auf das Lineal, nicht auf das Seil, nicht auf Visierung, sondern auf geometrische Sätze, wie z. B. die Proportionalität in der euklidischen Geometrie, oder auf Rechnung angewiesen. Die Überzeugung von der Unbeweisbarkeit des euklidischen Parallelenaxioms brach sich langsam Bahn; zuerst ist *Wallis* zu nennen, auf den, wie auf *Nasir Eddin* (*Thusis*) zuerst *Castillon* (l. c.) nachdrücklich hingewiesen hat; dann ist *Kästner* zu nennen und vor allem *Klügel*, der 1763 in seiner unter dem Einfluß *Kästner*'s entstandenen Dissertation 28 verschiedene Versuche kritisierte. Wahrscheinlich war auch *Lambert* zu derselben Überzeugung gekommen, etwa um 1766, und sicher *Gauß* um 1816 nach langem Kampfe mit dem kantischen Apriorismus. Man versuchte mehr und mehr das euklidische Axiom durch einleuchtendere, oder anschaulichere zu ersetzen. Indem ich auf die Sammelwerke, insbesondere auf *Schotten* und *Enriques* verweise, bemerke ich, daß fast jeder Satz von I, 29 bis I, 47 als Ersatz dienen kann. Ich erwähne:

Sind in einem Viereck drei Winkel Rechte, so ist es auch der vierte, wofür die Priorität nicht mir, auch nicht *Lambert*, auch nicht *J. W. Müller* in der Vorrede zur „Auserlesenen mathematischen Bibliothek", Nürnberg 1820, sondern *Clairaut* 1741 gebührt. Das Axiom von *Gauß*: „Es gibt ein absolut größtes Dreieck", Brief an *W. Bolyai* 1799, an *Schuhmacher* 1831, hat auch schon *Legendre* gestreift; bei *Worpitzky*, *Grun*. Arch. 55, p. 417 in der Form: „Es gibt kein Dreieck, in welchem jeder Winkel beliebig klein ist." Das Axiom: „Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben", ist vor *W. Bolyai* von *Stein* (*Gergonne* XV, Kritik des Anonymus von Bd. XIV) publiziert. Die Forderung der Ähnlichkeit, von *Saccheri* in der allgemeinsten Form: „Es gibt zwei verschiedene Dreiecke mit gleichen Winkeln" ausgesprochen, ist vor *Carnot*, *Maizières*, *Laplace* (Exposit. du syst. du monde, 5. édit. Paris 1824, V, 5. Note) und *Delboeuf* von *Wallis* 1663 zum Beweis benutzt. *Carnot* nennt am Schluß der géométrie de position (Art. 453) die Ähnlichkeit einen unmittelbar gegebenen Begriff, „da es jedermann klar, daß z. B. eine große und kleine Kugel dieselben Eigenschaften haben." Ausführlich hat diese Forderung *Delboeuf* 1893, revue philos. T. 36, p. 449 behandelt. Übrigens ist eigentlich schon bei *Proklos* die 5. Forderung durch das Axiom ersetzt: der Abstand zweier Parallelen ist endlich.

Das *Legendre*sche Axiom: „Es gibt ein Dreieck, in welchem die Winkelsumme zwei Rechte", ist schon erwähnt.

Der *Bertrand*sche Beweis des Summensatzes, den ich im Programm 1891 kritisiert habe, kommt zuerst in den Développements von 1778 vor.

Bouniakowsky 1843, Petersb. Akademie fordert bei der Kritik von *Legendre*, 1. Aufl. 1794 die Paralleldistanz unendlich; dies ist mit *Legendre* 1823 identisch.

Knar 1829 ersetzt das Parallelenaxiom durch ein Axiom über Addition von Winkeln. Der schärfste Beweis von der Unbeweisbarkeit des Axioms scheint mir der von *J. Hoüel*, Battagl. 8, p. 84, 1870. (Es verlangt die Voraussetzung, daß das Krümmungsmaß 0 sei.)

Über *Legendre* geht *Meikle* hinaus, der im 36. Band des Edinb. philosoph. journal den Satz beweist: Dreiecke von *gleichem Flächeninhalt* haben stets *gleiche Winkelsummen*. (Der Beweis ist ganz analog dem von mir in den: Elementen der Geometrie 1890, p. 61 gegebenen.) Durch *Meikle* wurde *P. Kelland* zu der Arbeit angeregt: On the limits of our knowledge, resp. the theory of Parallels; eine Arbeit, die nur teilweise das hält, was ihr Titel sagt. Edinb. Transactions 23 (1864), p. 433. Sie nimmt Euklid I, 16 an und gibt im wesentlichen eine Anzahl von Sätzen der *Lobatschefskij*schen Geometrie, von dessen Arbeit im *Crelle* er gehört hat, ohne sie gelesen zu haben.

Das von *Legendre* (1823) implizite benutzte Axiom: „Durch jeden Punkt im Innern eines Winkels läßt sich eine Gerade ziehen, welche beide Schenkel schneidet", ist von *Baltzer* in seinen Elementen explizite aufgestellt, aber schon von *J. F. Lorenz*, Grundriß der reinen und angewandten Mathematik Bd. 1, 1791 in der Fassung: Jede Gerade durch einen Punkt im Innern eines Winkels muß einen der beiden Schenkel schneiden (fehlerhaftes Zitat bei *Schotten* II S. 224).

Zusammenfassende Arbeiten.

Ich muß mich hier auf die wichtigsten beschränken und verweise auf die sehr reichhaltigen Angaben bei

H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts Bd. 2, (1893), Kap. III, S. 183—332, und *Fr. Engel* und *P. Stäckel*, Die Theorie der Parallellinien von *Euklid* bis auf *Gauß* (1895). Auf *Engel* und *Stäckel* beruht der hier in Betracht kommende Teil des Artikels von *Robert Bonola* in *F. Enriques*, „Questioni", Bologna (1900), S. 143.

R. Bonola, Index operum ad geometriam absolutam spectantium in der Festschrift In *Ioannis Bolyai* memoriam, Claudiopoli, 1902, p. 82—154; vorher im Bull. von *Loria*.

G. S. Klügel, Conatuum etc. recensio, Göttingen (1763), Lexikon (1808).

J. D'Alembert, Paris (1789), Dictionnaire encycl. des mathématiques, T. II S. 571.

J. J. J. Hoffmann (*Joh. Jos. Ign.*), Kritik der Parallelentheorie, Jena (1807) (auch eigner Versuch).

Vinc. Flauti, Nuova dimostrazione del postulato quinto etc., Neapel (1818).

C. F. A. Jacobi, De undecimo *Euclidis* axiomate judicium etc. Dissert. Jena (1824).

L. A. Sohncke, Artikel Parallelen bei *Ersch* und *Gruber*, Bd. 11 (1838) S. 368.

C. J. Hill, Conatus etc., London (1835—1844).

V. Bouniakowsky, Mémoire de l'académie de St. Pétersbourg (1844—1850); Kritik des *Legendre*schen Beweises.

J. Hoüel, Note sur l'impossibilité etc., Bordeaux (1869); vgl. auch *Battaglini* 8, S. 84 (1877).

P. Mansion, Sur le premier livre de la géométrie de *Legendre*; Revue de l'instruct. publ. (1870), S. 317.

S. Günther, Sulla possibilità etc., *Battaglini* XIV, S. 97—107 (ital. von *Sparagna*).

Einzelheiten.

Auch hier muß ich auf *Schotten* (l. c.) *Engel-Stäckel* und *Bonola* verweisen.

P. Ch. Voit, Percussio conat. etc. Dissert. Göttingen (1802).

L. N. M. Carnot (1803) (l. c.).

B. Bolzano, Betrachtungen usw., Prag 1804. Die Parallelentheorie gestützt auf *Pythagoras*, für den ein höchst eigenartiger Beweis gegeben wird.

Karl Schweikart, Die Theorie der Parallelen usw., Leipzig u. Jena (1807); s. nicht-euklidische Geometrie.

B. F. Thibaut, Grundriß usw., 2. Aufl., Göttingen (1809).

J. de Gelder, Beginseln der Meetkunst, Amsterdam 1810.

Louis Bertrand, Éléments de géométrie, Genf 1812.

J. D. Gergonne, Essai sur la théorie des parallèles; *Gerg.* III (1813), S. 353.

A. L. Crelle, Über Parallelentheorie und das System der Geometrie (1816). (*Bertrand*scher Beweis.)

Gauß s. nicht-euklidische Geom.

C. Reinh. Müller, Theorie der Parallelen, Marburg 1822, von *Gauß* gelobt.

J. P. W. Stein, *Gerg.* XV (1824), S. 77, Examen de quelq. tentatives de théories des parallèles. Zutreffende Kritik von *Legendre* 12; Axiom wie *Bolyai*, id. ibid. 16, S. 45; sehr richtige Kritik des *Bertrand*schen Beweises. *Stein* weiß bereits (1851 *Bolzano*), daß aus $nABC > nBADE$ nicht folgt, daß $ABC > BADE$, lange vor *Lüroth* (*Schlöm.* 21): *Winkel als Grenze des Kreissektors.**) *Gergonne* vereinfacht in der Note S. 49 seinen Beweis T. III und in der Note zu 15, S. 81 erwähnt er *Müller*, *Huber* (1823) und *Hauff* (1823 statt 21), der auch viele Kritiken enthalten soll. *Stein*, S. 257—261, treffende Kritik von *Legendre* 1 (1794).

F. J. Servois, *Gerg.* 16, p. 233 Sur la théor. etc. („rêve d'un vieillard"), Parallelentheorie wäre bewiesen, wenn Winkelsumme des Dreiecks > 90.

Bouvier, *Gerg.* 17, p. 132. Nicht beachtet, daß der Schnittpunkt von BD und der sich verschiebenden BE zuletzt ins Unendliche rücken kann.

F. A. Taurinus, Theorie der Parallelen, Köln 1825 und Geometriae prima elementa Köln 1826 (s. nicht-euklidische Geom.).

---

*) Lange vor *M. Simon* (1890).

C. Minarelli, Dimostrazione del quinto postulato d'*Euclide*, Bologna (1826), ein sehr scheinbarer Beweis, daß S nicht < 2 Rechte sein kann; er wird von *Aug. Genocchi* (1849) Nouv. ann. 8, p. 312 bekannt gemacht und ibid. p. 37 (1850) von *Lionnet* richtig kritisiert, vgl. *L. Carton.*

Nikolaj Lobatschefskij (s. nicht-euklidische Geom.) (1829).

L. Olivier, Crelle I (1826), p. 241. Über einige Definitionen in der Geometrie.

Th. P. Thompson, Geometry without axioms, London 1833. Vgl. Lehrbücher.

Wolfgang und ***Johann Bolyai*** (s. nicht-euklidische Geom.) (1832).

Van Swinden-Jacobi (1816—34), Definition der Parallelen; *D'Alembert*'s Mélang. V 202. Vgl. Lehrbücher.

A. L. Crelle, Crelle 11 (1834), p. 198. Anonym: *Bertrand* ohne Quellenangabe.

V. Bouniakowsky, Nouvelle théorie des parallèles, Mémoires St. Pétersbourg 12. Dez. 1845. Er beweist unter Voraussetzung der Unendlichkeit der Geraden, daß die Verbindungsstrecke zweier Punkte gleichen Abstandes nicht kleiner sein kann als die Basis a; er versucht zu beweisen, daß auf der Geraden dieser Strecke eine Strecke existiert zwischen zwei Loten auf der Basis, die um a voneinander abstehen, welche gleich a ist. Derselbe Mann, der am 12. Okt. 1843 *Legendre* rektifiziert hat, übersieht, daß c ins Unendliche rücken kann.

Breton, Nouv. ann. 7, p. 93 (1848) braucht *Catalan*'s Axiom: „Eine Gerade, welche 2 Punkte an verschiedener Seite der Geraden verbindet, schneidet", zum Beweis des Parallelenaxioms.

H. Germar, Grun. 15, p. 361. *Thibaut*scher Beweis; dito *W. Fischer, Grun.* 28, p. 365. *Heinen,* dito: *Grun.* 29 (1857), p. 474.

R. Baltzer, Stereometrischer Beweis von der Winkelsumme, *Grun.* 16, p. 129 (*Baltzer* setzt voraus, daß die Kugel mit unendlich großem Radius die Ebene sei.)

K. G. Reuschle, Mathematische Abhandlung, Stuttgart (1852), Über das Wesen des Parallelenaxioms 1) Zwei Gerade können sich nicht asymptotisch verhalten, 2) unbegrenzt, d. h. ins Unendliche verlängert werden. — *Bertrand*scher Beweis.

J. Delboeuf, Prolégomènes philos. etc. Liége (Lüttich 1860), sehr lesenswert.

H. Schwarz (nicht *Amand.*), Die Theorie der geraden Linie und der Ebene, Halle (1865).

J. A. Grunert, Grun. 47 (1867), p. 307 formuliert das Problem, rekapituliert *Legendre* 3—8 und weist auf *Lobatschefskij* und *Bolyai* hin, sowie ganz besonders auf *Hoüel* (s. Methodik).

Carton-Minarelli von *Bertrand gebilligt und der Pariser Akademie mitgeteilt,* Compt. rend. 20. Dez. (1869).

A. L. Crelle, Crelle 45, Zur Theorie der Ebene (Punkt und Gerade).

J. Hoüel, Note sur l'impossibilité usw. (s. nicht-euklidische Geom.) *Battagl.* 7, 84 (1870).

S. Günther, Über die Möglichkeit, das Parallelenaxiom durch stereometrische Betrachtungen zu erweisen. Italienisch übersetzt, *Battagl.* 14, 1876, p. 97.

J. C. Becker, Die Grundlagen der Geometrie, *Schlöm.* 20, p. 453. *J. Lüroth* ibid. 27, p. 294. *J. C. Becker* ibid. 22, p. 60. *Bertrand*'s Beweis.

T. W. Kettner, Beschouwingen over de theorie der evenwijdige lijnen etc. Dissert. Leiden (1879). (Geschichte, Kritik.)

M. Sibiriakoff (1881 und 1883), Vergebliche Versuche das Parallelenaxiom in der Form: der Parallelwinkel ist ein Rechter, zu beweisen.

Alf. Schmitz, Aus dem Gebiete der nichteuklidischen Geom.; Programm Neuburg a. D. (1884), richtige Kritik von *Bertrand*'s Beweis (vgl. *Stein*).

H. Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik, Programm Breslau (1883).

O. Rausenberger, Die Elementargeometrie usw. (1887), vgl. Lehrbücher.

M. Simon, Die Elemente der Geometrie, Straßburg (1890), id. Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geom. Programm (1891).

E. v. Schmidt, *Euklid* 11. Axiom; Moskau (1891) (glaubt das Parallelenaxiom beweisen zu können), definiert Ebene und Gerade wie *Bolzano*.

Fr. Schur, Die Parallelenfrage im Lichte der neueren Geometrie (1892); pädagogisches Archiv, p. 543.

Th. Cullovin, Quarterly J. 27, p. 188 übersieht die Möglichkeit einer Paralleldistanz, was *Cayley* sofort bemerkt; *Cullovin* sucht p. 225 zu verbessern, bildet dabei den falschen Grenzbegriff „letzte Schneidende". (*Kerry*, System einer Theorie der Grenzbegriffe (1890).) *Love* macht p. 353 auf den Unterschied zwischen dem fehlerhaften Begriff „letzte Schneidende" und dem richtigen Begriff „erste Nichtschneidende" aufmerksam.

J. de Tilly, Mathesis 19 (1899), p. 5. *Legendre*scher Satz: Wenn in 1 Dreieck, so in allen. p. 265, Sur la somme des angles dans un triangle.

M. Dehn, Math. Annalen (1900), p. 33. Die *Legendre*schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. *Dehn* beweist, daß, wenn in 1, so in allen $\sigma = 2R$, sich ohne *Archim.* Axiom beweisen läßt, dagegen der Satz $\sigma \leq 2$ Rechte nicht; im übrigen s. nicht-euklidische Geom.

W. Pflieger, Sammlung *Schubert* 1901, Axiom: Mit Winkeln wird wie mit Kreissektoren (deren Grenzen sie sind) gerechnet (*Bertrand*). Vgl. Grundlagen, Lehrbücher, *Euklid* und besonders nicht-euklidische Geometrie.

B. Kreis.

6. Quadratur des Zirkels. Von der über 5000jährigen Geschichte des Problems, das von allen Problemen am meisten zur Entwicklung der Mathematik beigetragen hat, gehört eigentlich nur die erste Periode, die Zeit vom Beginn der Kultur bis zu *Huygens* „de circuli magnitudine inventa" 1654 der Elementargeometrie an. Ich* möchte die Einteilung *Rudio*'s ändern in elementar-geometrische, arithmetisch-trigonometrische von 1654—1744 und algebraische von 1794—1882. Übrigens tritt der arithmetische Charakter des Problems eigentlich schon in der ersten Periode hervor. Dazu kommt seit 1882 die vierte, die Periode der Elementarisierung (der Beweise der Transzendenz von e und π). Das 19. Jahrhundert ist für den elementargeometrischen Teil gekennzeichnet durch die Wiederaufnahme der isoperimetrischen Methode von *Nicolaus Cusanus* und *Euler* (s. unten) und durch die Kenntnis von den Arbeiten der Ägypter und Inder.

Aus dem Papyrus Rhind, dem von *A. Eisenlohr* 1877 herausgegebenen Handbuch des Schreibers *Aahmesu* richtiger *Jahmose* (Mondsohn) aus dem mittleren Reich (1700 vor Chr.) erfuhren wir, daß die

Ägypter den Kreis gleich einem Quadrat mit der Seite 8/9 des Durchmessers setzten. Dieser sehr respektable Näherungswert für π — 3,16 — ist auf rein experimentellem Weg gefunden. Übrigens ist die Ausgabe von *Eisenlohr* veraltet; es ist z. B. falsch, daß der Kreis und die Zahl 9 den gleichen Namen haben. Der Kreis heißt paut, die Zahl 9 pesit; so existiert das Bescha-Maß nicht, usw.

Aus *St. T. Colebrooke* (s. Geschichte) lernen wir die Zahlen des *Aryabhatta* und *Bhascara*: 3,1416 und die des *Brahmagupta* — $\sqrt{10}$ — kennen, die auffällig mit der ägyptischen stimmt.

Dazu kommen noch Näherungskonstruktionen und nähere Berechnungen von π.

Das Zeichen π, von dem noch *Schubert* 1889 (s. unten) angibt, daß es von *Archimedes* stamme, ist zuerst von *William Jones* 1706 gebraucht (*Rouse Ball*, *Eneström* 1894, S. 106), und dann von 1737 an von *Euler* benutzt (*Eneström*, Bibl. math. (2) 3 (1889), p. 28) und durch die Introductio (1748) verbreitet, aber noch 1824 wird im *Gergonne* dafür ϖ gesetzt, was allerdings auch π typographisch heißen kann.

Eine auffällige Erscheinung möchte ich hier erwähnen. Während die französischen Lehrbücher schon seit *Legendre* die Sätze des *Archimedes* über den Zusammenhang der Umfänge des $2n$-Ecks um und im Kreis mit dem des n-Ecks bringen, und sie wie *Archimedes*, d. h. mit dem Satze über die Winkelhalbierende sehr einfach ableiten, finden sich in den deutschen auch in den neuesten von *Thieme* (1902) und *Fenkner* (1904) die ungeschickten Ausdrücke von s_{2n} durch den Radius und die Seite s_n. Die Ableitung durch die analogen Flächensätze von *Jacques Gregory* habe ich nirgends gefunden, ebenso wie die isoperimetrische Methode, wie sie z. B. *Cambier* hat, und, was das auffallendste ist, die so schönen und einfachen Sätze *Huygens'* scheinen spurlos an den höheren Schulen vorübergegangen zu sein. Ausnahme *Jacobi-van Swinden*.

a. Zusammenfassende Werke und Abhandlungen geschichtlicher Art.

Außer *Klügel* (Montucla):

P. O. C. Vorsselmann de Heer, De praecipuis methodis quae ad circuli quadraturam ducunt, Groningae 1832 (Preisarbeit), p. 119—128.

J. W. L. Glaisher, Remarks on the calculation of π, Mess. of math. (2) 2 (1872), p. 119—128 siehe unter f, Bericht über Quadratur von 1580—1650.

F. J. Studnička, Zur Quadratur des Kreises (von *Archimedes* bis *Richter* 1855), Časop. (1872), p. 95.

H. Schubert, Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen, Hamburg 1889.

O. Diederichs, Die Rektifikation des Kreises in der Schule. Progr. Halberstadt 1891.

F. Rudio, *Archimedes, Huygens*, usw., Leipzig 1892 (2. Aufl. in Vorbereitung).

Einzelheiten:

Max Curtze, Zur Geschichte der Kreismessung und Kreisteilung im XV. Jahrhundert, Bibl. math. (3) 2 p. 48; *Hoffm.* XVI, *Hammer*, *Schlegel; E. Böttcher; Huygens,* De circuli magnitud. inventa ist schon vor *Rudio,* von *Kießling,* Programm Flensburg 1868, wiedergegeben mit einer kurzen eignen Herleitung der *Huygens*schen Sätze. Außerdem die vielen Aufsätze von *Bierens de Haan* über *Ludolph van Ceulen*, *Snellius, Huygens,* usw. in den Amsterd. Verh. und Mededeel., dem Bullet. *Boncomp.* usw. — *C. Demme, Schlöm.* lit.-hist. Abt. 31 (1886), p. 132, sucht den ägyptischen Näherungswert bei *Ahmes* und den indischen des *Baudhâyana* zu erklären. *Kikuchi* teilt in den Berichten der math. Gesellschaft von Tokio 1895, *Fujisawa* im Compte rendu du deuxième Congrès intern., Paris 1900, Interessantes über ältere japanische Methoden mit. *A. Aubry,* Noticia histórica sobre la cuadratura del círculo, in *Galdeano*'s Progreso mat. (2) 2 (1900), p. 273—306. Übrigens ist noch heute die Ausgabe von *Montucla,* Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, 2. Bd. (Quadrat, duplic. du cube, trisect.) von 1831 mit den Noten von *Lacroix* lesenswert.

b. Quadratoren.

An. Schorn, *Εὕρηκα* 1831.

Maccook, 1841, $\pi = 2(1 + \sqrt{8\sqrt{2} - 11})$, the quadrature of the circle, Correspondence between an eminent mathemat. and *James Smith,* London 1861.

Adamo, Cosenza 1864.

O Donnell, Buenos Aires 1870.

J. Klimaszewski, Paris 1879.

C. Busch, Ohrdruf 1885.

G. Kerschbaum, Hamburg 1887.

J. Hülß, Mailand 1889, Che è π?

Venturini 1892.

A. Ozegowski, „Die Wahrheit schreitet einfach aber majestätisch vor und zermalmt ihre Gegner", $\pi = 3\frac{3}{7}$, Ostrowo 1893.

Lopez (Motto: „Tandem" „un fou de plus"), Rio de Janeiro.

Salv. Andrascolo, Buenos Aires 1898.

Kandoloros, „*εν Αθηναις*" 1898.

W. Göring, Dr. phil. Die Auffindung der rein geometr. Quadratur des Kreises usw. Dresden 1899.

Als „Quadrat. raisonnable" wird *Poirier* bezeichnet, der 1893 die Sehne von $\frac{26}{75}$ des Umfanges gleich der Seite des flächengleichen Quadrats setzte.

Nicht uninteressant ist: De quadratura circuli secundum legem intersect. duplic. et de polyg. reg. vom ungarischen Advokaten *Jos. Balogh,* Pest 1858 (lunulae *Hippocratis*).

G. B. Malacarne (di Vicenza), Soluzione geometr. e *rigorosa* (auch Trisektor!) del problema della quadratura etc., Vicenza 1845, oft aufgelegt auch in französischer Übersetzung.

Über die Quadratoren vgl. auch: *A. de Morgan*, A Budget of Paradoxes, London 1872; *F. Cajori,* Circle squarers, Teaching and history of Math. U.S. (1890), p, 391—394.

c. Näherungskonstruktionen.

Zufallslösungen:

L. Mascheroni, La geometria del compasso, Pavia 1797, von *A. M. Carette* als Géométrie du compas, Paris 1798; Gebrauch des Zirkels, deutsch von *Grüson*, Berlin (1825), übersetzt: $AB = ED = r$; $AF = EF = AD$; $BF = BG$; AG merklich $\frac{1}{2}\pi r$, Fehler etwa 0,0008. (Fig. 1.)

Deutsche Lösung in der Biblioth. Britt. abgedruckt *Gergonne* 8, p. 250; es ist die *Kochanski*sche (*Adam K.*, Acta eruditorum 4 (1685), p. 397), die schönste von allen, welche u. a. als *Ceradini*sche von *Cremona* mitgeteilt ist in seinen Elementen des graphischen Kalküls. Deutsch von *Curtze* 1875 (Hypotenuse der Katheten 2 und 3 — tg 30) Fehler $< 1 : 16859$, eben diese ist von *Nic. Nawrotzki*, Über die Rektifikation der Peripherie des Kreises, Hamburg 1846 gegeben.

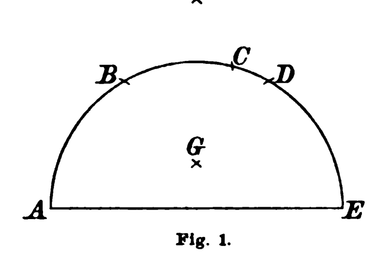


Fig. 1.

Pioche, Bildhauer zu Metz (mitgeteilt von *Servois*, *Gerg.* 8, p. 252) $AB = AC = r$; $CD = 2r$; $ED = DF$; $AH = FG = r$; $FK = \frac{3}{8}r$; $AL = \frac{4}{5}r$, so ist $KL = 2\pi r$; $\pi = \frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 3{,}1415925534$; der Fehler $< 10^{-7}$ also genauer als *Adriaan Metius* $\frac{355}{113}$. (Fig. 2.)

C. G. Specht, *Crelle* 3 (1828), p. 83; $BC = r$; $BD = 2r$, $Da = ab = bc = \frac{1}{5}r$; $BA = Ca$; aus A mit Cc Parallele AE, so ist BE Umfang, BEC Inhalt des Kreises

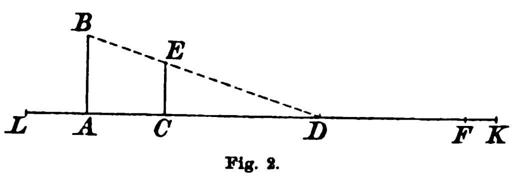


Fig. 2.

($Ca = \frac{\sqrt{146}}{5}$; $\frac{BE}{Ca} = \frac{13}{5}$; $BE = \frac{13}{25}\sqrt{146} = s_p$; $BE = 3{,}1415919533 \cdot 2r$. Fig. 3.) Fehler $7 \cdot 10^{-7}$ reprod. *Gerg.* 19, p. 126; vgl. dazu *M. F. Bretschneider*, *Grun.* II 3, 1886: $\pi = \frac{1}{10^7} + sp$; *Specht*, *Crelle* 3, 405; *M. G. v. Paucker*, Die elem. Geometrie, Königsberg 1823,

$$\pi = 5\sqrt{\frac{439}{778}} = 5\sqrt{\frac{3^2 + 6^2 + 13^2 + 15^2}{3^2 + 6^2 + 13^2 + 8^2}}.$$

Die schöne Konstruktion von *J. de Gelder* (Leiden 1765—1848) für den Näherungswert des *Adr. Metius* $355 : 113 = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$, aus De Rapporten van den zirkelbogen, Verhandl. Genotsch. Rotterd. XII, 1798 bei

J. H. van Swinden, Grondbeginsels der Meetkunde, 2. Aufl. Amsterdam 1816; anonym im *Grun.* Bd. 12, 1849, p. 98 (Index von 1859 nennt *Grunert* selbst!), sie ist von *Herm. Graßmann* wiedergefunden. *Grun.* 49, 1868, p. 3, siehe darüber

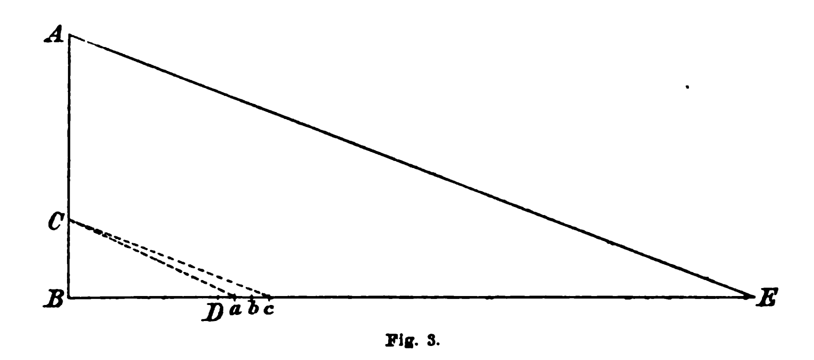


Fig. 3.

E. Böttcher, Hoffm. XVI, p. 412; vgl. auch *Holzhey*, Zeitschr. österr. Arch.- u. Ing.-Ver. (Konstruktion zur möglichst genauen usw.).

Rud. Wolf (der Züricher Astronom), *Grun.* (2) 3 (1893), p. 445: Die Strecke, welche die Mitte der Quadrantensehne mit dem Endpunkte des Durchmessers verbindet, nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$; (1,58).

Auf die vom Uhrmacher *A. Redier* 1864 wiedergefundene Konstruktion des Herzogs *Bernhard von Sachsen-Weimar*, welche *J. A. Timmermans* in der Korresp. *Garnier* et *Quetelet* 4 (1828), p. 349 mitgeteilt hat und die nach *Timmermans* um so genauer, je größer n, gründet *Tim.* die Formel:

$$\frac{x^2}{r^2} = 1 - \frac{8}{n} - \frac{48}{n^2} - \left(1 - \frac{6}{n}\right)\sqrt{1 - \frac{4}{n} - \frac{4}{n^2}}$$

und

$$\pi = \frac{1}{2} \lim. (nx) = \sqrt{10}.$$

(Inder!)

Catalan-Tempier, Verhältnis von *Peter Metius* mit dem von *Archimedes* verbunden $\pi = (355 + 22) : (113 + 7)$, schon *Ptolemaios*.

Ch. M. Willich, Nouv. ann. 15 (1856), p. 224: $\sqrt{\pi} = 1,77198$.

H. Perigal, *Messeng.* (2) 4, (1874), p. 71; 2 Konstruktionen für $\sqrt{\pi}$.

A. W. Anglin, Messeng. 13, (1884), 4 mehr oder minder komplizierte Konstruktionen; ibid. 14, (1884); noch fünf z. B. $\sqrt{\pi} = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right)$ Sehne von 75° usw.

R. Hoppe, Grun. II 2, 1885, p. 447 (welche *Hoppe* für recht einfach hielt!).

M. F. Bretschneider, Grun. II 3, (1886), p. 447, π auf 9 Dezimalen.

Maurice d'Ocagne, Bourg. (1895), p. 77, Relation von *Bioche*, Soc. math. de France 6 (4) 4 p. 242. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \pi + 0,0047$ benutzt: AOB von 45°, Bisectrix von COA schneidet in D, so ist $AD = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; von *A. Mannheim*, ibid. p. 103 verbessert (ohne Trigonometrie). (Fig. 4.)

A. Pleskot, Časop. 1893 $\pi = \sqrt{51} - 4$, Fehler 0,0002; von *E. Lemoine*, Unter-

suchung über die Einfachheit und Genauigkeit dieser beiden Konstruktionen und der $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\pi}{4} + 0{,}0007$; Soc. math. de Franc. Bullet. 23, 1895, p. 242.

E. Lakenmacher, *Grun.* II 9, 1890, 214. e Mitte von cd, f von ed, k von ch, kz von dy, so ist $cl = \frac{3}{10}ab$, $ch = 0{,}28r$, $dy = r\sqrt{0{,}4}$ und az bis auf weniger

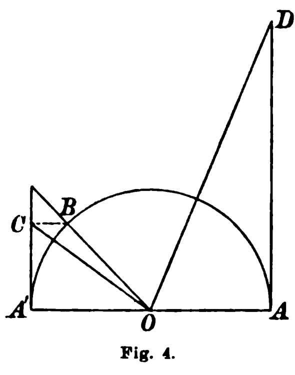


Fig. 4.

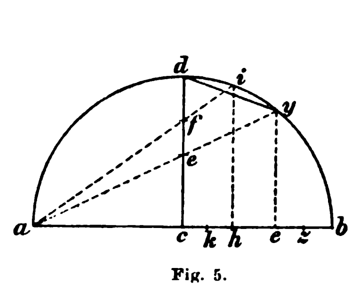


Fig. 5.

als 1 : 65000 die $\sqrt{\pi}$; ders. ibid. (2) 5 (1887), p. 352, $\pi = 1{,}8 + \sqrt{1{,}8} = 3{,}141641$. (Fig. 5.)

E. Böttcher, Grun. II 12, 1894, derselbe Gedanke wie nach seiner Angabe.

Ch. Nehls, Über graphische Rektifikation von Kreisbogen, Hamburg (1892).

H. Postula, Mathesis (2) 5 (1895), p. 87. ACB Durchmesser, $CG = \frac{1}{6}CA$ um G mit $4r$ Kreis, der die Tangenten in B in F schneidet, AF schneidet den Kreis in D, so ist $BD^2 = 3{,}141579$.

Ich erwähne noch die Konstruktion des Amtsrichters *C. Busch*, Ohrdruf 1885, $\pi = 2\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}-3}{13}$, die in *Fialkowsky*'s „Zeichnende Geometrie", (auch in *Gerland*'s „Planimetrie", 3. Aufl., Dessau 1885). $\pi = 0{,}6\,(3+\sqrt{5}) = 3{,}14164$, sowie *Beyel* (Zürich 1886) $\frac{\pi}{2} = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ und die Konstruktion aus *Catalan*'s Théorèmes et problèmes. $BD = 2r$, $Da = \frac{1}{5}r$, $Db = \frac{3}{5}r$; $BA = Ca$; und durch die Parallele zu Cb, welche BD in E trifft, dann ist BE nahezu gleich der Peripherie und $\frac{1}{2}BE = 3{,}1415915$. (Fig. 6)

Fig. 6.

Immerhin bleibt die *Kochanski*sche unübertroffen, auch nicht durch $3 + \frac{1}{10}\sqrt{2}$ und die Konstruktion aus *A. L. Busch*, Vorschule der darstellenden Geometrie 1846:

$\pi = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$, auch nicht durch die in London 1872 preisgekrönte Formel von *Jicenki*

$$\pi = 3 + \frac{1}{10}(\cos 15^0 + 0{,}45) = 3{,}14159258.$$

Eine reichhaltige Zusammenstellung findet sich bei *G. Paucker*, Die ebene Geometrie, Artikel 317, Königsberg (1823), wo als Urheber von $3 + \frac{1}{10}\sqrt{2}$ D. *Joh. Molther* genannt ist. (Vater oder Sohn des Dichters *Philipp M.*?)

E. Reichenbächer, Angenäherte Konstruktion des Kreisumfanges aus dem Durchmesser, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. **32** (1901), p. 275—276 konstruiert

$$\pi^4 = 97\frac{9}{22} = \left(9\frac{7}{22}\right)^2 + \left(2\frac{16}{22}\right)^2 + \left(1\frac{17}{22}\right)^2,$$

woraus $\pi = 3{,}1415926526$ statt $3{,}1415926535$.

d. Bogen (siehe auch Trigonometrie.)

J. J. Åstrand, Grun. 13 (1849), p. 398 (*Prosz*, Lehrbuch der Geometrie, Stuttgart (1842) in Nouv. ann. 6 (1847), p. 287 von *G. J. Dostor*, reproduz.) AD Winkelhalbierende, $DE \perp AD$, AF Halbierungslinie von EAD, $FG \perp AF$ usf. Dann liegt der Bogen zwischen AD und AE, AF und AG etc. (Fig. 7.)

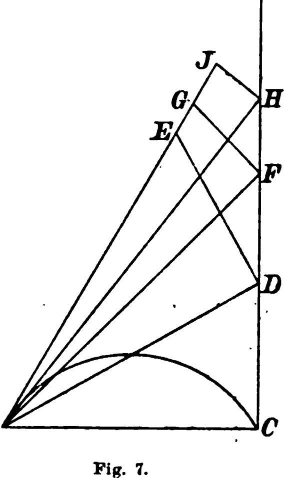


Fig. 7.

H. Scheffler, Geometrische Näherungsmethode zur Rektifikation und Quadratur des Kreises. 3 Hefte 1867—68—73. Grun. 13 (1849), p. 419, reproduz. in *G. A. Riecke*'s Mathematischen Unterhaltungen, Stuttgart 1873 und von *W. Goering*,*) (1899). „Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises", Dresden; er hält die Konstruktion für neu, die der *Prosz*schen sehr verwandt ist; schon *Scheffler* sagt, daß die Konstruktion die *Vieta-Euler*sche Formel

$$\alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2^2} \cos \frac{\alpha}{2^3} \cdots}$$

gibt, deren Konvergenz von *M. Lerch*, Časop. 11, p. 192, (1882) und von *F. Rudio*, Schlöm. 36 (1891), Hist. lit. Abt. p. 139 nachgewiesen ist.

O. Schlömilch, Schlöm. 2 (1857), p. 335, die alte einfache Konstruktion

$$AB = 2r;\quad BC = r;\quad AD = \widehat{AF} = \frac{3r \sin u}{2 + \cos u} = r\left(u - \frac{u^5}{180} - \frac{u^7}{1512} - \cdots\right),$$

*) Einige Jahre, nachdem Ref. im mathem. Colloquium auf *Scheffler*, bezw. *Prosz* hingewiesen hatte.

$u < \frac{1}{2}\pi$, um so genauer je kleiner u. Die Formel geht auf *Nikolaus Cusanus*, den großen Kardinal, zurück. (Fig. 8.)

Nahe verwandt mit *Prosz-Scheffler* ist auch die Methode von *H. Schubert*, Zur Veranschaulichung der Zahl π, *Hoffm.* 27, p. 121 (1896), welche *Schubert* durch *E. Glinzer* in dessen Lehrbuch hat veröffentlichen lassen. (3. Aufl. (1887.)

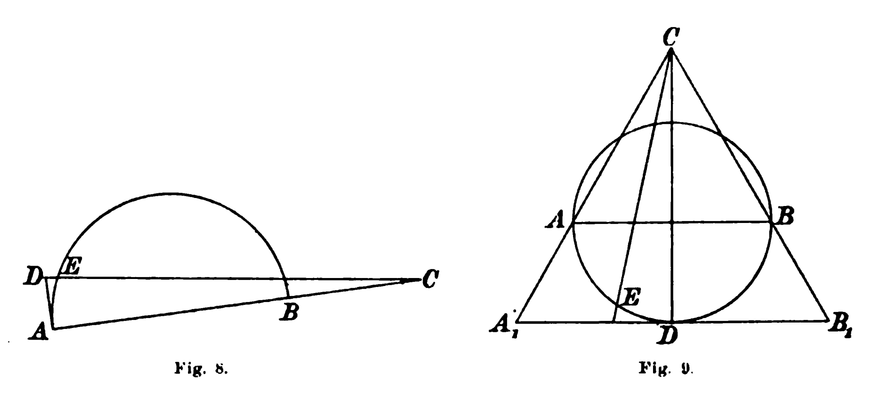


Fig. 8. Fig. 9.

V. Schlegel, *Schlöm.* 22 (1877), p. 339. A C B gleichseitig, *A' B'* nahezu gleich halber Peripherie, *DE'* nahezu gleich Bogen *DE*; damit auch zugleich Kreisteilung. Die Annäherung ist aber keine große. (Fig. 9.)

Auf *Newton*, Brief an *Oldenburg* 13. Juni 1676, geht die Formel

$$x = \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x} \sin x$$

zurück, welche *P. Mansion* im *Messeng.* 25 (1896), p. 48 und Mathes. 16 (1896), p. 84 untersucht hat.

Emil Lampe, Mathes. (2) 7 (1897), p. 129 etc. Eine ganze Reihe Näherungsformeln mittels Methode der unbestimmten Koeffizienten aus der Formel:

$$\frac{2n}{n+1}\left(\sin x - \frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)}\frac{\sin 3x}{3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)$$
$$= x + cx^{2n+1} + \cdots$$

abgeleitet und ähnlichen. (Dazu *Aubry*, Progreso (2) 2, p. 283.)

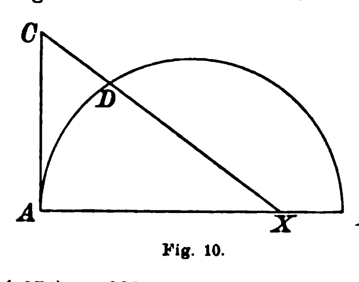


Fig. 10.

Fr. Strempel, Ein Annäherungsverfahren zur Verwandlung von Kreisbogen in gerade Linien und umgekehrt. Progr. Rostock 1898: $\widehat{AB} = AC$; $AX = x = \varphi(1 - \cos\varphi)$: $(\varphi - \sin\varphi)$ nahezu gleich $3 - \frac{1}{10}\varphi^2$. (Fig. 10.) Derselbe Progr. 748 (1903).

Eine Quadratur des Sektors auf *statischer* Grundlage gibt *E. Collignon*, Nouv. ann. (2) 13 (1874), p. 389.

Nicht ganz elementar ist *Olinde Rodrigues:* Note sur l'évaluation des arcs de cercle. *Liouville* 8 (1843), p. 225.

L. Oppermann: Tychsen-Tidsskrift I (2), 5; 104 (1869). Ist B die Länge eines Kreisbogens, C die der Sehne und $Z = 6\left(1 - \frac{C}{B}\right)$, so ist die Anzahl der Grade des Bogens nahezu gleich $114{,}59156\sqrt{Z \cdot \frac{420-11\,Z}{420-32\,Z}}$.

Es werde hier auf die schöne *Huygens*sche Konstruktion des Kreisbogens hingewiesen.

e. Numerische Berechnung von π.

Archimedes 2 Dezimalen, *Inder* 3 bezw. 4, *Ptolemäus* 4, *Rheticus* 8, *Petrus Metius* 8, *Vieta* 11, *Adrianus Romanus* 16, *Ludolph van Ceulen* 35, *Grienberger* (Jesuit) 39 (1630); von da ab arctg Reihen.

Abr. Sharp 73, *Machin* 100, *F. de Lagny* 127, *Vega* 140 bezw. 136, *Manuskript Radcliffe* zu Oxford 156, *Dase* 200, *Clausen* 248, *Richter* 330, *Rutherford* 440, *Richter* 500, *Shanks* 550, dann 607, zuletzt (1873) 707. Proc. Royal soc. 22 (1873) p. 45.

Z. Dase: Crelle 27, p. 198, $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, von den 140 *Vega*'s die 4 letzten falsch. *W. Rutherford:* Philosoph. transactions Vol. 131 (1841), p. 281 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99}$, die ersten 152 stimmen mit *Dase* (*Euler:* De variis method. circ. quadrat. numer. proxime exprim. Petrop. T. IX, p. 222 (1764): $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{ax-y}{ay+x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$). Anonym. Oxf. *Dase* l. c. (1844); *Clausen:* Astronomische Nachrichten 1847, Nr. 184, T. 25; *Shanks:* Proceedings Royal Society, Januar 20, 1853, p. 273; *Richter* (1853), *Grunert* 21, p. 119; (1854) 22, p. 473; 23, p. 476 (1854). *W. Rutherford:* Proc. Roy. Soc. 20. Januar, 1852 p. 273; *Richter: Grun.* 25, p. 472 und Elbinger Anzeiger, 18. Okt. (1854), 500 Dezimalen; *Shanks* 607 (1853). Berechnung von π durch die Reihe $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{2} - \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{7}$ etc. *Edg. Fusby: Messenger* (1873), p. 114, Bemerkung von *Glaisher*.

π mittels der Formel für $\sin 2\varphi$ schon *Barrois: Gergonne* 4, p. 361 und nicht zuerst von *Seidel*, München, auch schon von *Vieta*, dessen Formel von *Grebe: Grun.* 11 geometrisch abgeleitet wird (*Grun.* selbst auch aus $\sin 2\varphi$, 11 p. 181) die Konvergenz des unendlichen Produkts von *Lerch* und *Rudio* l. c. nachgewiesen.

π auf 30 Dezimalen in französischen Versen: Nouvelle correspondance 6 p. 449.

Neuer Kettenbruch von *Sylvester:* Philosoph. Magazine 37, 1869, p. 378

$$\frac{\pi}{2} = [1;\ 1,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42\ \ldots]$$

Untere und obere Grenze für π *Didion:* Comptes rendus, Bd. 74, 1872, p. 36, dazu *E. Catalan* p. 177 *Vieta*sche Formel und Educational times 70, 1899; 13

$$\pi > \sqrt[3]{31},\quad \pi < 2\sqrt[6]{960}.$$

Nach einer rein empirischen Methode ist π im Philosoph. Magazine Okt. 1862 auf 16 Dezimalen berechnet und ebenso rein empirisch diese Methode von *Drach*, London Mathematical Society Proceedings 8 (1877), p. 316 auf 208 Dezimalen ausgedehnt.

Den *Lambert*schen Beweis der Irrationalität von π gibt *Glaisher:* Reports of British Association 1871 statt auf 30 Seiten auf einer Seite, auch der *Legendre*sche Beweis ibi.

Die Transzendenz von π: ***F. Lindemann;*** Berliner Akad. Sitzber. 22. Juni 1882. Über die Zahl π: *Clebsch* Annalen 20 (1882), p. 213 (im Anschluß an *Hermite*'s Beweis der Transzendenz von e und verbessert von *Weierstraß*). Die immer einfacher werdenden Beweise von *Gordan, Hurwitz, Hilbert, Weber* etc. gehören der Algebra an, die Transzendenz von π ist schon 1865 durch *H. Scheffler: Grun.* 44, p. 89 geahnt, aber nicht genügend begründet worden, vergl. hierzu Encykl. III, Referat *Sommer.*

Formeln um mit π bequemer zu rechnen z. B. $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1000} - \frac{1}{2000} - \frac{1}{50000}$; $\pi^2 = 10\,(1-0{,}01304)$; $\pi^{-2} = 10^{-1}(1+0{,}01527)$ aus Mathem. Gazet. in Mathesis (2) 4, p. 162. Vom reihentheoretischen Standpunkt aus mehrfach, z. B. *Glaisher:* Quarterly journal 11, p. 232 (1873).

Die „eigenartige" Methode von *A. S. Herschel:* Quarterly journal 4, p. 165 gegründet darauf, daß $\operatorname{arctg} \pi$ fast Wurzel von $\cos x = \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}} = 0{,}7863$, $x = 38^\circ 10' 46''$ gegen $38^\circ 8' 4.''$, ist schon von *Crelle: Crelle* 32, p. 91 (1846), benutzt, er bemerkt auch, daß $\sin x =$ der doppelten Zehnecksseite.

Der alten Quadratrix und der Spirale gesellte *Guimarães* die Cykloide zu (emprego da cycl. Teixeira Journal VI, 85 (1885)); mittels Lineales und Zirkels und einer festen Cykloide eine große Anzahl Probleme der element. Geometrie über Teilung und Quadrierung etc. des Kreises; hierhin gehört auch die Konstruktion durch den Integraphen von *Abdank-Abakanowitsch* bei *F. Klein:* Elementargeometrie (1895).

Über $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{i} \log i$ *Schellbach: Crelle* 9, p. 404 (1832).

Eine Zusammenstellung von Formeln *J. C. Dupain:* Nouvelles annales 5, 12, 16 etc. *F. J. Studnička:* Über die Quadratur des Kreises Vestnick 8 (1899), p. 305 Reihe für $\frac{1}{2}\pi$.

f. π durch Wahrscheinlichkeitsrechnung, Nadelproblem.

$w = \frac{2l}{a\pi}$, wo l Länge der Nadel, a der Abstand der Parallelen; m die Zahl der Versuche, n die Zahl der Schnitte $w = \lim \frac{n}{m}$. *Laplace:* Théor. analyt. de la probabilité V; *Messenger* (2) 2 (1872) *A. Hall* (Cap. *Fox* Verfahren). Dazu gehört der Artikel von *Glaisher* unter α, der auch über Versuche berichtet, die *Ambroise Smith* 1855 auf Veranlassung *de Morgans* angestellt hatte, denselben Gegenstand betrifft die Note von *P. Gray, Messeng.* (2) 3 (1873) p. 61, vgl. auch *R. Wolf:* Geschichte der Astronomie und Handbuch der Astr. — Grashalme zum Kranz $w = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-1)}}$. *E. W. Grebe: Grun.* 11, p. 44; *Würfelversuch.* ***R. Wolf,*** Zürich: Vierteljahrschrift Bd. 26 und 27; π durch Experimente. ***A. Panek, Časop.*** X, 272 (1881), böhmisch.

g. Methode des Archimedes.

Verbessert von *James Gregory* (1667) in der „Quadratura", der statt der Umfänge die Flächen der demselben Kreis ein- und umgeschriebenen regulären Polygone einführte, bezw. *J. Saurin:* Sur les figures inscrites et circonscrites au cercle. Paris (1723); historisch: *P. Tannery:* Sur la mesure du cercle d'Archimède, Mémoire Bordeaux (2) 4 (1881), p. 313, erklärt des *Archimedes* Methode zur Ausziehung der Quadratwurzeln, dazu *Fr. Hultsch, Schlömilch*'s Zeitschrift für Math. und Phys. 39 (1894), p. 121, 161.

A. L. Crelle 14, p. 66 (1835) (*Huygens*) Beweis, daß $q'-p'<\frac{1}{4}(q-p)$, wo p und q Inhalt oder Umfang des ein- und umgeschriebenen ebenen n-Ecks, q' und p' des $2n$-Ecks bezeichnen.

H. Bertot: Nouv. ann. 2 (1843), p. 196, 250 dito.

H. Mourgues: Nouv. ann. 3 (1844), p. 13.

Dés. André II, 13 (1874), desgl.

P. Breton (de Champ): Nouv. ann. 4 (1845), p. 415 verbessert den *Legendre*schen Beweis aus den Elementen, daß Kreis R: Kreis $r = R:r$.

A. Morel, Bourget (1879), p. 22, Beweis, daß $\lim q = \lim p$. Setzt die Hauptsache $q >$ als die Peripherie voraus.

A. Meyer: Cirkelperifiens Längde etc. Nyt Tidssk. f. Math. 5 (1834), p. 68. $\text{Lim}\, Q_n = \text{Lim}\, P_n$; *elementar u. exakt.*

*Lionnet*scher Satz: Die Differenz zwischen Peripherie und Umfang des innern n-Ecks ist, wenn $n > 3$, kleiner als die Seite des n-Ecks. *Lionnet* selbst: Nouv. ann. (2), 10, p. 556 (*Bourget* [1879], p. 193) ebendort; *Callandreau:* trigonometrisch; *Gerono,* elementar, p. 433; *Durel* (2) 11, p. 90, trigonometrisch.

Die numerische Berechnung: *Hellwig: Grun.* 18, p. 234. *Ligowski: Grun.* 55 (1843), der die kleinen Radien zur *Vieta*schen Formel benutzt. *Weinmeister: Hoffm.* 8. Vor allem *Catalan* und *Schlömilch; Catalan:* Nouv. ann. 1 (1842), geht von der *Saurin*schen Formel $B' = \frac{2AB}{A+A'}$ aus, wo A Inhalt des innern, B des äußern n-Ecks (1723) und leitet ab:

$(A_m)^2 = 2(A_{m-1})^3 : (A_{m-2} + A_{m-1})$, was *Crosson:* Nouv. ann. 5, 1846, p. 128 weiter ausführt. *O. Schlömilch: Schlöm.* 2, p. 330, *Grun.* 14, p. 408 Formel 68), Nouv. ann. 14, p. 462 $\pi = 3 \cdot S_k T_k : 2S_k + T_k$; Fehler $< \frac{1}{40}(T_k - S_k)^2$.

L. Maleyx: Nouv. ann. (3), 5 (1886), p. 5, durch Berechnung des großen und kleinen Radius bei konstanter Seite und geeigneter Methode aus Ausdrücken von der Form $a^2 + e$ die Quadratwurzel zu ziehen. Auch als selbständiges Buch, Paris 1886. *Maleyx* glaubt die Methode des *Archimedes* wieder hergestellt zu haben; dies könnte höchstens für die Wurzelberechnung zutreffen, vgl. aber *Hultsch, Schlöm.* 39 (1894), p. 121. Nouv. ann. (2), 10 (1871), p. 454 weist *Gerono* einfach geometrisch nach, daß der Kreis zwischen na und $(n+1)a$ liegt, wo a Seite des eingeschriebenen regulären n-Ecks ist.

h. Methode der Isoperimetrie.

a ist kleiner, r großer Radius des regulären n-Ecks mit stets verdoppelter Seitenzahl, welches mit dem ursprünglichen gleichen Umfang, bezw. Inhalt hat. Es ist dann $2a' = r + a$; $r'^2 = ra'$.

Methode von *Schwab* (Eléments de géométrie, Nancy [1813]), dito *John Leslie* (Elements of geometry, 2. Aufl. [1816]); *E. Sarcy:* On *John Leslie*'s computation, Edinburgh Proc.: XV, p. 348 (1889), aber die Methode ist weder deutsch noch englisch, sondern, wie *O. Terquem: Liouville* (1838), 3, p. 47 berichtet, schon von *Descartes* ohne Beweis, Oeuvres 7, XI, p. 442, der von *Euler:* Novae commentationes Petropolit. 7, VIII, p. 157 hinzugefügt ist; sie geht aber auf *Cusanus* zurück, der in einer zwar willkürlich, aber mit gutem Instinkt gewählten Konstruktion einen ganz brauchbaren Näherungswert findet.

Zuerst *Gergonne* (*Gerg.* 6, p. 492) π auf 7 Dezimalen mittels Methode von *Schwab, Gergonne* 17, 0 und 1 seien erste Glieder, dann abwechselnd arithmetische und geometrische Mittel bis zu zwei Zahlen a und b, die in mehr als der Hälfte ihrer Ziffern von links aus übereinstimmen, dann ist in den Grenzen dieser Annäherung $\pi = b : (a + 2b)$.

A. J. H. Vincent's Bearbeitung von *Schwab*'s Methode Nouv. ann. 4, *Grun.* 6, p. 331.

Die einfachste Ableitung ist von *E. Léger:* Nouv. ann. V, p. 204 (posthum) $OD = r$, $OC = a$, EF Seite des isoperimetrischen Polygons; dann ist ohne weiteres klar, daß $OG = a' = \frac{1}{2}(a + r)$ und $OE^2 = r'^2 = ra'$ und *ganz einfach* folgt, daß $4(r' - a') < r - a$. (Fig. 11.)

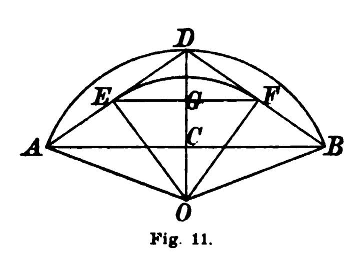


Fig. 11.

E. Catalan: Théorèmes et problèmes, 7. Aufl., Buch 4 und Kongreß zu Havre der Assoc. française (1877) gründet auf *Léger*'s Methode Verfahren für π^{-1} und $2\pi^{-1}$.

I. de Virieu: Nouv. ann. 18, p. 234. *André* hübscher Beweis, daß $4\left(a_{k+1} - a_k\right) < a_k - a_{k-1}$ und $4\left(r_k - r_{k+1}\right) < r_{k-1} - r_k$ Nouv. ann. (2) 13, p. 178; man eliminiert zwischen r_2, r_3 und u_2 und u_3, dann die letzteren etc., daraufhin von *E. Rouché* (Nouv. ann. (3) 1, p. 325) die Berechnung abgekürzt; desgl. *P. Mansion*, der: Mathesis 3, p. 161 beweist, daß $5\left(a_{k+1} - a_k\right) > a_k - a_{k-1}$. *Ancion:* Mathesis 3, p. 145 (1883).

Über die Fehlergrenzen: Huet: Nouv. ann. 4, p. 156 $n = > \frac{m + \log(b - a)}{\log 4}$, wo n die Zahl der Verdoppelungen und a und b die Umfänge des einfachen ein- und umgeschriebenen n-Ecks und 10^{-m} die Fehlergrenze.

A. Hermann: Nouv. ann. (2) 5, p. 509 Fehler $< 10^{-m}$, $2^k = 2 + 2m$; wenn $m = > 7$, genügt es in 2^k das $k = 2m$ zu machen (Note von *Gerono*).

E. Jubé: Nouv. ann. 5, p. 42, $k = > \frac{5}{3} m - 1$, wenn man vom isoperimetrischen 6-Eck ausgeht.

Daß beide Methoden für die Berechnung von π im Grunde identisch, wie schon früher von *Vincent* und andern bemerkt war, von *M. Fouché:* Bull. Société mathém. de France.

In *Hoffmann* 2, 339 ist die *Schwab*sche Methode von *K. Zerlang ohne Quellenangabe* abgedruckt.

π als Grenze eines *nicht* regulären Polygons *L. Geoffroy: Bourget* 5 (1881) p. 49, 97 [*Leibniz*sche Reihe, *Gregory?*].

J. Kürschák: Ungarische Berichte (11. Febr. (1887). 5, p. 77 elementar-geometrischer Beweis, daß die eingeschriebenen regulären Polygone mit wachsender Seitenzahl beständig wachsen (*James Gregory*), die umgeschriebenen beständig fallen.

i. Lunulae Hippokratis.

Gewöhnlich wird der Pluralis gebraucht und dem *Hippokrates* der Satz zugeschrieben: Die beiden Halbmonde, begrenzt von den Halbkreisen über den Katheten (nach außen) und dem über der Hypotenuse (nach innen), sind gleich dem rechtwinkligen Dreieck. *Hippokrates* hat nur einen Halbmond (meniscus, lunula), d. h. eine von zwei verschiedengradigen Bogen begrenzte Fläche quadriert und zwar in drei verschiedenen Fällen, zuerst den, dessen äußerer Bogen der Halbkreis, dessen innerer der Quadrant ist. Der Irrtum findet sich selbst im *Rouché* von 1900. Mitunter wird sogar gesagt, daß das Möndchen über jeder Kathete gleich dem gleichliegenden Höhendreieck sei! Die Erweiterung fand ich nicht bei *Vieta, Clavius* und *Sturm*, wohl aber bei *Tacquet* als Zusatz zu *Euklid* XII, 2, was auch *van Swinden* schon anführt (Übersetzung von *C. F. A. Jacobi* p. 213, p. 214, *van Swinden:* „Über mondförmige und andere ähnliche Figuren verdient vorzüglich nachgelesen zu werden: *G. W. Krafft,* Institutiones geometriae sublimioris, Tubingae, 1753").

In *Spieker*'s Lehrbuch findet sich der Satz: Beschreibt man über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks die Quadranten nach innen, über der Hypotenuse nach außen, so ist das von drei Quadranten begrenzte Flächenstück gleich dem Dreieck. Kreisbogendreiecke sind wohl zuerst von *Vieta* quadriert, der vor *Tannery* das Prinzip der Quadrierung der Lunulae klar gelegt hat. *Hippokrates* hat nach dem Bericht des *Simplicius* im Kommentar zur Physik des *Aristoteles,* bezw. nach *Eudemos* nur die Fälle erledigt, in denen sich die Quadrate der ähnlichen Sehnen wie 1:2; 1:3; 2:3 verhalten; die beiden andern Fälle 5:1 und 5:3 sind von *Clausen* gegeben und finden sich bei *Enriques* im letzten Artikel. Der von *Vieta* gegebene Fall 1:4 (Variorum etc. liber VIII) verlangt die Lösung des Delischen Problems (s. Trisektion). Zusammenfassend:

Gabriel Cramer: Histoire de l'Académie royale de Berlin (1748) p. 482.

C. A. Bretschneider: Die Geometrie und die Geometer vor *Euklid,* Leipzig 1870.

G. J. Allman: Hermathena 5 (1877) Nr. 7 (1881); Greek Geometry, Dublin, London 1889.

H. Diels, Kritische Textausgabe des Kommentars des *Simplicius,* Berlin 1882.

P. Tannery: La géométrie grecque, Paris 1887.

Vor allen *F. Rudio:* Bibliotheca mathem. (3) 3 (1902) und Zusatz 4 (1903). Seiner Rettung des *Simplicius* schließt sich *H. Schmidt,* ibid. 4 Heft 2 an, sowie der Referent.

Th. Clausen: Crelle 21 (1840), p. 375, zwei neue Mondchen 5:1 und 5:3; der entscheidende Satz ist schon von *G. Cramer* (l. c.) gegeben und findet sich auch bei *G. Paucker:* Die ebene Geometrie, Königsberg 1823. Die Sätze daselbst über die Quadrierung von Teilen des ersten *Hippokrat*schen Mondes sind schon in den Acta eruditorum (1700), p. 306, durch einen Brief von *Wallis* aus dem Englischen des *Johannes Perks:* Acta philosoph. anglican, der (1699), p. 411 mitgeteilt, in dem auch *Tschirnhausen* und *David Gregory* erwähnt sind.

Matth. Paschen, Über die sogenannte Quadratur des Kreises, Progr., Neiße 1877.

G. Dostor, Arch. d. Math. u. Phys. 65 (1880), p. 193. Die Differenz zwischen dem Kreisbogendreieck und dem gemeinsamen bikonvexen Stück ist auch gleich dem Dreieck (Halbkreis über der Hypotenuse nach außen, Katheten nach innen).

F. W. Fischer, Grun. 66 (1881), p. 337 (Arbelos s. Kreis).

Z. Reggio: Quadratura di certe aree circolari, Veneto Atti (5) 7 (1891), p. 1097. Dreiecke, bezw. Vielecke von Kreisbogen, die sich in *einem* Punkte schneiden, dabei *Pascal* und *Brianchon* (s. Transversalen).

P. Tannery (l. c.): Verallgemeinerung der Quadratur der Summe eines Halbmondes mit einem Kreise von *Hippokrates.*

Max. Haberland, Prog., Neustrelitz 1897. Eine sogenannte Erweiterung auf ein beliebiges Dreieck.

[Vgl. auch *E. Landau,* Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke, Sitzgsber. Berl. Math. Ges. 2, 1—6, 1903.]

7. Reguläre Polygone, Kreisteilung. (Vgl. Trisektion.) Die Konstruktion der regulären Polygone, bezw. die Teilung des Vollkreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile ist wiederum eine der großen Aufgaben, aus denen sich die Geometrie entwickelt hat. Wie die Quadratur und die Trisektion hat auch sie ihre Lösung von der Arithmetik erhalten. Aus dem von *F. Klein:* Math. Annalen 57 herausgegebenen Tagebuche *Gauß'* von 1796—1814 wissen wir, daß *Gauß* das Problem am 30. März 1796 bewältigt hat und 19jährig (nicht 17jährig wie gewöhnlich gesagt wird) die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks gefunden hat. Wir wissen durch *Sartorius,* daß diese Entdeckung *Gauß* für die Mathematik entschieden hat. Im Intelligenzblatt der Allgemeinen Litteraturzeitung (Jena) Nr. 66 vom 1. Juli 1796 findet sich die erste Veröffentlichung, welche von *E. A. W. Zimmermann* veranlaßt ist. Die vollständige Theorie gab *Gauß* dann in den Disquisitiones arithmet. von 1801, wo er Sectio VII bewies, daß, wenn n eine Primzahl und $n-1=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$, die Teilung zurückgeführt werden kann auf α Gleichungen 2. Grades, β 3. Grades und so fort, so daß für Primzahlen eine Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) dann und nur dann möglich, wenn $n-1=2^\alpha$ ist (wo $\alpha=2^r$), und wenn N keine Primzahl, so muß es, abgesehen von 2^x, aus Primzahlen dieser Art zusammengesetzt sein. Vgl. hierüber *F. Klein:* Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, Leipzig 1895 und *L. Wantzel, Liouville* 2 (1837), p. 366.

A. Allgemeines (vgl. auch Polygon).

L. N. M. Carnot (1801): P ein Punkt, R Abstand vom Zentrum, r Radius des Umkreises, n Seitenzahl $\Sigma PA_k^2 = (r^2 + R^2)\, n$, auch géométrie de position p. 320 (Spezialfall des 2. *Stewart*schen Satzes); ein Spezialfall des ersten: „wenn p Lote von einem Punkt auf die Seiten des umgeschriebenen n-Ecks bedeuten, so ist $2\Sigma p^3 = 5nr^{3}$", ist von *Glenie:* Edinb. transactions 1805 bewiesen.

Mat. Stewart gab 1746 in der Schrift Some general theorems etc. 64 Sätze, davon nur 8 mit Beweis. *Alle* wurden von *Th. St. Davies* bewiesen: Edinb. transact. 15 (1844), p. 573 analytic discussion etc. und vier Jahre später von *P. Breton* in *Liouville* 13 (1848), p. 281; sie beruhen im wesentlichen auf Summation nach k von $\cos^\nu\left(\frac{k}{m}\,2\pi + \alpha\right)$: Programm über die general theorems. *P. Meutzner,* Meißen 1874, darin $\Sigma p_k^n = m\left(R^n + A_v^2 R^{n-2} + B_v^4 B^{n-4} + C\ldots\right)$, wo $A = [n|2]:\, 2^2$; $B = [n|4] : 2^2\cdot 4^2$; $C = [n|6] : 2^2 4^2 6^2$ etc. Von *Meutzner* selbst

$$\Sigma p_k^n = m\left(v^n + A v^{n-2} R^2 + \ldots\right),$$

d. h. Vertauschung von v und R; R ist Radius des Inkreises, v Abstand des Punktes, bezw. der Geraden, p_k Lot vom Punkt auf die Seiten, bezw. von der k-Ecke auf die Gerade, m die Seitenzahl und $n < m$. Ebendort auch Beweis des 2. *Stewart*schen Satzes: wenn P ein Punkt, $p_k = PA_k$, und v die Entfernung vom Zentrum des umgeschriebenen Kreises r ist, so ist

$$\sum p_k^{2\nu} = m \sum_0^{\nu} (\nu_q)^2\, r^{2\nu-2q}\, v^{2q},$$

wo $\nu < m$ ist. Daß die entsprechenden Sätze für die *Kugel* gelten, bemerkt *Meutzner,* gibt aber an, daß *Ellis* (Brief an *Breton*) dies früher gefunden. Über die general theorems vgl. auch *H. M. Jeffery*: On theor. relating to the regular polyhedras, London R. S. Proc. 13 (1882) p. 105.

Français: Gergonne 5 (1814 und 15), p. 341 im wesentlichen Spezialfälle der *Stewart*schen Sätze, aber selbständig gefunden.

*L'Huilier*scher Satz: Bibliothèque universelle 1824 mars; ohne Beweis, Inhalt eines Polygons, dessen Ecken die von einem Punkt P auf die Seiten gefällte Lote sind, ist nur abhängig von dem Abstand P's vom Zentrum; Beweis *Ch. Sturm:* Gerg. 15 (1825), p. 45, desgl. p. 250, wo der Satz $\Sigma a_k^2 =$ const. (a_k Seite des eingeschriebenen Fußpunkt-Polygons) etc., verallgemeinert von *Steiner: Crelle* 1, p. 38 (s. Simson-Linie).

Manderlier: Correspondance Quetelet 3 (1827), p. 3. Einem regulären Polygon ein anderes reg. Pol. von doppelter Seitenzahl einzuschreiben.

A. F. Svanberg (Stockholm): Correspond. Quetelet 9 (1837), p. 72. Analyse des polygones et des pyramides régulières; dabei Polygone, deren Seiten gleich und deren Winkel abwechselnd gleich (trigonometrisch und analytisch).

E. F. August: Crelle 17 (1837), p. 387; merkwürdiger Satz über die Gleichheit der Summe der geraden und ungeraden Strahlen.

O. Terquem: Liouville 3 (1838). *Wenn n Primzahl > 2 ist, so ist der Perimeter inkommensurabel mit dem Radius;* gleichzeitig auch von *Bouniakowsky:* Bulletin scientifique de St. Pétersbourg 5 (1838) 16. Nov., aber schon *Lambert:* Mémoire de Berlin 1761.

D. (?): Cambridge journal 1843. Erweiterung *Wallace*scher Sätze. Wenn p_k Lot auf Seite, so ist $p_1 p_3 p_5 \cdots p_{2n-1} + p_2 p_4 \cdots p_{2n} = \frac{r^n}{2^{n-2}} = A$, da die erste Summe $A \sin^2 \frac{\varphi n}{2}$ und die andere $A \cos^2 \frac{\varphi n}{2}$ und ähnliche Sätze.

A. Amiot: Nouvelles annales 3 p. 246; die Anzahl der Sternpolyeder und Sternpolygone erst allgemein, dann 17-Eck (nn' aus n und n').

C. C. Gerono: ibi 16, p. 44. Die algebraische Summe der Lote auf eine durch das Zentrum gehende Axe ist 0, Beweis des *Carnot*(*Stewart*)schen Satzes.

Mourgues: ibi 18 (1859), p. 158; ist d der Abstand von Ecke oder Seite, so ist Σd_k^n für das Zentrum Minimum.

Van der Mensbrugghe: Bulletin de l'académie de Belgique 2 p. 17. Ist Sm die Summe der m^{ten} Potenzen der Projektionen der Seiten a im regulären n-Eck auf irgend eine Axe, so ist $Sm = 0$ und $Sm = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m} n a^m$, je nachdem m ungerade oder gerade.

N. A. Whitworth: Messenger 4 (1875), p. 88; regelmäßige Polygone (Streckenzug) im Raume.

Spezialfälle der *Stewart*schen Sätze, sowie des *L'Huilier*schen kehren öfter wieder, so

F. Celestri: Periodico di matem. 13 (1898), p. 165, p. 193, so in der Sammlung Bayrischer Examenaufgaben von *Sailer* der Satz: Die Summe der Quadrate der Seiten und Diagonalen ist $n^2 r^2$.

Fr. Meyer: Hoffmann 17 (1886), p. 50. Methodisch (mit dem regelmäßigen Streckenzug beginnend).

A. Grusinzef: Rechnerisch; die Erweiterung der Methode *Abul Djuda*'s fürs 9-Eck auf die Seitenberechnung des $(2n+1)$-Ecks: Charkower Gesellschaft 37 (1884).

Die vollständige Unterscheidung der $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Arten eines regulären n-Ecks, d h. der Zahl der Umläufe um den Kreis zuerst bei *L. Poinsot* in der grund legenden Arbeit: Mémoire sur les polygones et les polyèdres; Journal de l'école polytechnique 10 (1810); vgl. auch *Terquem:* Nouvelles annales 8 (1849) und deutsch *J. Dienger, Grunert* 13.

B. Sporer, Grunert (2), 3 (1886), p. 217. Eine algebraische Kurve, welche mehr Symmetrieaxen hat, als ihre Ordnung angibt, ist ein Kreis, bezw. besteht aus konzentrischen Kreisen.

J. Casey, A sequel to Euclid, Dublin 1881; sehr einfacher Beweis dafür, daß das umgeschriebene regelmäßige n-Eck Minimum ist, vgl. Isoperimetrie.

G. Russo, Bourget (1885), p. 284. 1. Beweis des Satzes von *Carnot*, 2. des Satzes von *E. Vigarié:* Wenn $\delta_{k,p}$, alle Diagonalen von der Ecke A_k bezeichnen, so ist $\Sigma \delta_{k,p}^2 = 2(nR^2 - a^2)$, wo a die Seite.

L. Vautré, Bourget 13 (1893), p. 248. Einem regelmäßigen konvexen n-Eck ein konvexes Polygon einzuschreiben, dessen n-Winkel gleich sind, wenn eine der Ecken gegeben ist. Vgl. Artikel *Castillon*sches Problem.

L. E. Dickson (*Catalan,* géométrie): Annals of mathematics 9 (1894—95), p. 73; American mathem. monthly sept. 1894.

V. Bochow, Programm, Magdeburg (1896). Eine einheitliche Theorie der regelmäßigen Vielecke.

E. Dolezal, Grunert (2), 15 (1896), p. 172—222; sehr ausführlich, wenig Neues.

J. Oppert (der große Orientalist), Série pour déterminer le côté d'un polygone rég. de n côtés, Assoc. franç. pour l'avanc. des scienc. Sess. 25 (1896), p. 133.

M. Dietrich, Summen gleich hoher Potenzen der von einem der Teilpunkte eines gleichgeteilten Kreises gezogenen Strahlen. — Blätter für d. Bayr. Gymnas. Wesen 33 (1897).

Im Cambridge journal 2 (1842) (Senate-house problems 1836) ein algebraischer Beweis, daß ein um ein Oval geschriebenes regelmäßiges Polygon Minimum ist, ein elementar geometrischer Beweis von *Goodwin*, Cambridge and Dublin (1848), p. 181 (im übrigen s. Isoperimetrie).

Literarhistorisch.

Chr. Wiener, Über Vielecke und Vielflache, Leipzig (1864).

S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Kap. I, Leipzig (1876).

Max Brückner, Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte, Leipzig 1900.

M. Curtze, Zur Geschichte der Kreismessung und Kreisteilung im 15. Jahrh., Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 48.

a. Allgemeines.

Die Näherungskonstruktionen, welche beständig wiederkehren, sind die so genannte „*Renaldini*sche von 1689 und die des *Herzogs Bernhard von Sachsen-Weimar*, welche *J. A. Timmermans* in der Correspondance Quetelet (4), p. 349: Sur l'inscription des polygones regulières dans le cercle mitgeteilt hat.

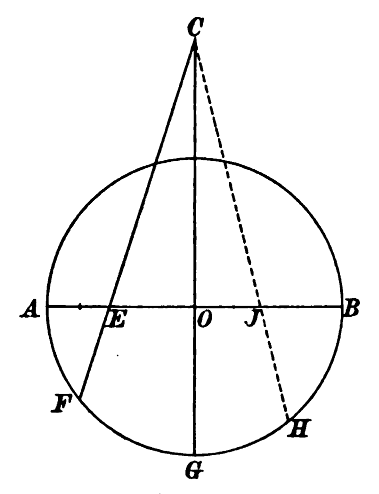


Fig. 12.

C. Renaldini, ACB gleichseitig, AB in n Teile, E zweiter Teilpunkt von A aus, CE trifft in F, so ist $AF\left\{\frac{1}{n}\right.$ Peripherie. (Fig. 12.)

Bernhard von Sachsen-Weimar: $AD = \frac{3}{n}$ Durchmesser, $AP = CQ = \frac{1}{n}$, CQ schneidet in E, so ist $DE\{s_n$ vgl. auch *Hoffmann* 28 und Educational times 56 (1892), 11121; *Pressland* (1892). (Fig. 13.)

Die Konstruktion von *Renaldini* wird von *Timmermans* l. c. p. 346 *Bion*, Traité de la construction etc. (1752) und vielleicht *Deville*, Traité de fortification (1628) zugeschrieben, desgl. von *Housel* in Nouvelles annales 2, p. 77. Im *Grunert* 24 (1855), p. 318 steht sie „aus Buch unbekannten Verfassers, unbekannter Jahreszahl". Die *Renaldini*sche Konstruktion rührt von *A. de Bosse* her, der die *Deville*sche ein wenig verbessert hat im Traité des pratiques géométrales 1665. (Vgl. dazu *Pressland* Edinburgh M. S. proceedings 10 [1892]). Sie ergibt für $\cos\frac{2\pi}{n}$ den Wert

$$\frac{(n-4)(3n+\sqrt{n^2+16n-32})}{4(n^2-2n+4)}.$$

Die Konstruktion ist durch *Tempier:* Nouvelles annales 12 p. 345 und ibi 13 etwas abgeändert; danach ist:

$$\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{12n + \sqrt{48n^2 - 5n}}{3n^2 + 16}$$

und ist sehr genau, wenn $n \geqq 8$, Maximalfehler 2′48″ von $n = 12$ an, wo sie exakt ist. Ob n gerade oder (Nouv. annal. 13) ungerade, man schneidet vom Zentrum aus $\frac{2}{n}$ ab bis J (s. Fig. 12) zieht CJ, schneidet in H, so ist $GH\left\{\frac{1}{n}\right.$ Peripherie. Bis zu 10° ist *Renaldini* vorzuziehen. Eine allgemeine Methode von

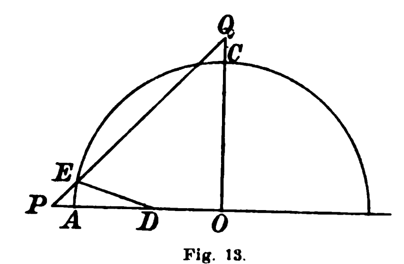


Fig. 13.

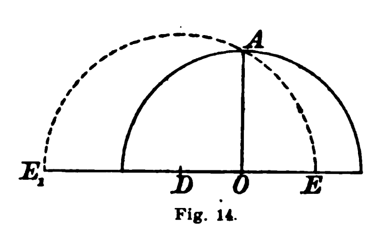


Fig. 14.

V. Schlegel: Schlömilch 22 (1877), p. 332 (s. bei Quadratur [Bogen]), reguläres Dreieck (s. Dreieck): *Gergonne* 14, p. 376; Newcastle magazine Dez. (1825).

b. Besondere Vielecke.

5-Eck und 1 Eck: Die Konstruktion von *Ptolemäus*, D Mitte, $DE = DA$, so ist $OE = \frac{s}{10}$ und $AE = \frac{s}{5}$, (bei *Jacobi*) *van Swinden* (1834), bei *Laurent: Bourget* (1895) (aber schon bei *Dürer*) und Educ. times (61) 12291. *J. H. Hooker* (EE' Sternfünfeck, s. *Laurent*). (Fig. 14.)

Das ganze regelmäßige 5-Eck *v. Staudt: Crelle* 24, p. 251 ohne Beweis, den *H. Barrel:* Nouv. annal. 11 (1852), p. 388 gibt.

E. Ferron, Nouvelle correspondance 1 (1874), p. 89. Neue Konstruktion.

E. Collignon (Methode von *Legendre*) Association française (1879), p. 162.

M. Chapron, *Bourget* 1885, p. 119, teilt die Konstruktion aus *Chardon* cours de dessin linéaire 1857 mit.

J. Cernesson, nur aus dem Umstand, daß $2 + 3 = 5$ *Bourget* (1890), p. 49, ders. *Bourget* (1891, p. 121, ibi (1895) (vgl. [1893] p. 17 *Ptolemäos!*). *Droz-Farny* regelmäßiges 5-Eck bei gegebener Seite dazu, *Mannheim* p. 623.

A. Droz-Farny, *Bourget* (1897), p. 106 (*Mascheroni*-Konstruktion).

Pentagon von *Albrecht Dürer* untersucht durch *van Aubel* (Nouvelle correspondance) (3) (1877), p. 386. $A = B = 108°12'1''$, $D = 109°16'42''$, $E = C = 107°2'8''$. Das Pentagon ist schon 1471 von *Joh. Honk* gegeben und *Clavius* hat in der geometria practica die Winkel verbessert.

Ich bemerke noch die Konstruktion von *Henri Postula,* welche *E. Catalan,* théorèmes et problèmes (6. Aufl. [1879], p. 282) angibt, und *Stuyvaert:* Mathesis (1899), p. 20 und *Fontené* ibid. und *Davies:* Educat. times (70) 13766, p. 86.

Über die Näherungskonstruktionen *Albrecht Dürer*'s handelt das bekannte Programm von *S. Günther* (5, 7, 9, 11, 13, Trisektion etc.) *Ansbach 1886* und *H. Steigmüller, Dürer* als Mathematiker, Progr. Stuttg. 1891.

Eine 5-Eckkonstruktion mittels Kravattenknoten aus den Récréations math. von *E. Lucas* ist in Mathesis 3 (1883), p. 54 abgedruckt.

Das 17-Eck: Nachdem *Gauß* auf arithmetischem Wege in den Disquisitiones arithmeticae die Abhängigkeit der Seite des $n = (2^k + 1)$-Ecks, wo n eine Primzahl ist, von einer Kette quadratischer Gleichungen und damit die Konstruierbarkeit gegeben, hat *A. M. Ampère* die 17-Teilung elementar-geometrisch bewiesen (bei *Catalan* l. c. p. 267): *Crelle* 24, p. 251, die schöne Konstruktion von *v. Staudt* (Lineal und fester Kreis) ohne Beweis, den *H. Schroeter* trigonometrisch gibt, der *Crelle* 75 (1872), p. 13 die Konstruktion von *Staudt*'s vereinfacht und beweist. (*Hoüel* franz.) Sehr hübsche Konstruktion: *W. Richmond*, Quarterly journal 26 (1893) p. 206. *V. A. Lebesgue*, Nouvelles annales 5 (1846), p. 683 ($\cos 16x - \cos x = 0$).

Auf eine Bemerkung von *F. Klein*: Anmerkung in den Vorträgen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie (1895), p. 27, gibt *L. Gérard* (Lyon) eine *Mascheroni*-Konstruktion mit 27 Kreisen: Math. Annalen 48 (1891), p. 360 und desgl. *G. Mulsow*, Progr. 691 (1898) Schwerin, aber vgl. *A. Adler* (1891) unter Kreis. *R. Güntsche* in Sitzber. Berl. Math. Ges. 2 (1903) p. 10—16 geometrographische Siebzehnteilung des Kreises.

G. Fontené, Mathesis (2) 9 (1899), p. 179. *Mariantoni* und *Palatini*, Nouv. annal. (1899), p. 126.

Nouvelles annales 5 p. 340 gibt *Berton* an, daß, wenn man um einen Punkt der Peripherie mit 0,74 des Durchmessers einen Bogen schlägt, die Peripherie nahezu in $\frac{8}{17}$ und $\frac{9}{17}$ zerlegt wird. Berechnung der 17-Eckseite bei *V. Bochow*: *Schlömilch* 38 p. 250. *Catalan* (l. c. p. 305) bemerkt, daß die s_{17} nahezu $\sqrt{\frac{1}{7}}$, was die *Renaldini*sche Konstruktion gibt.

Vergleiche über das 17-Eck auch *Klügel* 5 p. 811, wo *Paucker, Rothe, Eninger, Grunert* gewürdigt sind.

An *Gauß* anschließend gibt *J. A. Serret* im Cours d'Algèbre supérieure (3. Aufl. Nr. 585) auf algebraischer Grundlage sehr verständliche elementar-geometrische Konstruktionen.

Die Konstruktion *C. G. Ch. von Staudt*'s wird von *G. Affolter* auf alle regulären Polygone, die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen [*Gauß*], ausgedehnt: *Clebsch* Annalen 6, p. 582, 592, Beispiel: Konstruktion des *257-Ecks* auf p. 588.

Die große Arbeit *Richelot*'s: *Crelle* 9 über das 257-Eck ist algebraisch. Dasselbe behandelt *Schwendenheim*, Programm Teschen 1892 und 93.

Die Arbeiten von *J. Hermes* über das $(2^{16}+1)$-Eck sind handschriftlich im Seminar von *Göttingen* aufbewahrt.

e. Besondere approximative Konstruktionen.

$S_7 \left\{\frac{1}{2} S_3\right.$ *Henri Postula* (bei *Catalan* l. c.); dasselbe *Plagge*, *Hoffmann* 4, p. 356 und bei den Indern und *Abul Wafa* und im Kodex lat. Monacensis 14111 (Angabe von *M. Curtze*). *Postula*: AB und CD zwei aufeinander senkrechte Durchmesser des Kreises O, $CE = r$, $DF = DE = FH = FG$; $AJ = AD$, $JD = JK$, dann ist: $AH \{ s_9$, $OH \{ s_{24}$, $OJ \{ s_{15}$, $HK \{ s_{17}$. (Fig. 15.)

Matthew Collins, Nouvelles annales 5 (1896), p. 226. Die 7-Teilung auf Dreiteilung eines Winkels φ, so daß $\operatorname{tg} \varphi = 3\sqrt{3}$, gegründet; hübsche Konstruktion.

Marqfoy ibi 9 (1850), p. 233; 7-Eck-Konstruktion von *Vieta* bewiesen. *Weihrauch*, *Grunert* 48 (1868), p. 116, 14-Eck. 7-Eck-Konstruktionen auch in *J. Todhunter's* Euklidausgabe von 1861.

G. Affolter, Clebsch Annalen 6 (1874), p. 592, 7-Eck und 13-Eck (Trisektion).

E. Pascal, Battaglini 25 (1887), Konstruktion mit Hilfe eines Kegelschnittes, wenn n Primzahl und $n - 1 = 2^k \cdot 3$, auf 97-Eck, 13-Eck, 7-Eck angewendet.

A. Howe, The approximate inscription of certain regular polygons, Annals of mathematics 5 (1889) p. 12; 9-Eck, 11-Eck, 13-Eck mit Fehlerschätzung, 9-Eck sehr genau.

A. Denys, Mathesis 10 (1890) p. 162 und 216, 9-Eck, s_9 als die Differenz der Seiten der beiden Stern-9-Ecke (*Ptolemaios*). $3 s_9 s_9' s_9'' = s_3^3 : \frac{2}{s_3} = \frac{1}{s_9} + \frac{1}{s_9'} - \frac{1}{s_9''}$ etc. (*Ritter:* Associat. franç. 1879. $a_3^3 = a_9 a_9' a_9''$, wo a das Apothema; (kleiner Radius)].

H. J. Pressland, Educat. times 50 (1894) 11 609; $s_{29} \left\{ \frac{1}{8} s_3;\ s_{31} \right\} \frac{1}{17} s_4;\ s_{10} - s_{17} \left\{ s_{25}, \right.$ ibi 11 541, 17-Eck: Mitte des Radius mit Ende der 17. Eckseite, ibi 11 468 sehr hübsche 9-Eckkonstruktion. D Mitte, $DOF = 45 : 2$, $BE \{ S_9$. (Fig. 16.) *Matthew*

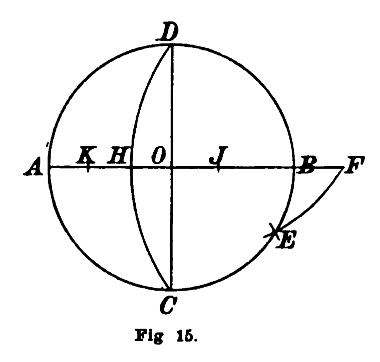


Fig 15.

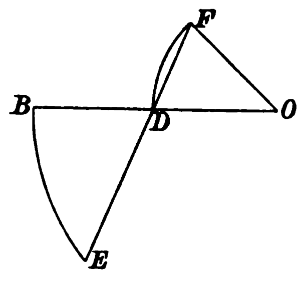


Fig. 16.

Collins 11-Eck: Educ. times 69 (1898) p. 128 No. 4653 $CA = s_5$, $AB = s_6$, D Mitte von CB, E von DA, so ist $EA \{ s_{11}$ (Bogen $32^0 \frac{8}{11} \}$ 33)

Estremoff, 7- und 9-Eck bis 0,001, *Spazinski*'s Bote No. 146 (Russisch) $AM - 2KM$ nur um $0{,}00\,137 > a_7$ (Educ. times). (Fig. 17.)

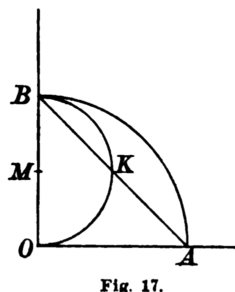


Fig. 17.

Direkt geometrischer Beweis, daß das 12-Eck $= 3r^2$ von

J. Kürschák, Ungarische Berichte (15) 196 (1898).

V. Jarolímek, reguläres 15-Eck, einfache Relationen der Seiten, Časopis 27 (1898) p. 231.

J. Paoli, Construct. du degré de la circonférence. Revue de math. spéc. 10 (1899) p. 318, Neunteilung durch den limaçon de Pascal, der Grad durch die Gleichung $\frac{1}{360} = \frac{3}{5} - \frac{3}{8} - \frac{2}{9}$, auf Neunteilung reduziert.

Freeth, Kurve für reguläres 7-Eck, 9-Eck und 11-Eck, London Math. society Proceedings 10 (1879) p. 228.

Historisch: *M. Cantor*, Über einige Konstruktionen von *Lionardo da Vinci* 5-Eck, 8-Eck, 9-Eck und 18-Eck), Berichte der Hamburger mathematischen Gesellschaft 2 (1890) p. 8.

E. W. Grebe: Schlömilch 8 p. 225, Relation $s_3{}^2 = s_5{}^2 + s_{10}^2$ aus Polyedrometrie.

E. Franken: Mathesis 9 p. 109, einfach geometrischer Beweis der Relation: $x = \sqrt{r\left(r+\frac{1}{2}a\right)} - \sqrt{r\left(r+\frac{1}{2}a\right)}$, wo $a = s_n$ und $x = s_{2n}$

d. Sternpolygone.

G. Dostor, Grunert 59 p. 375, derselbe ibi 61 (1877) p. 409. Die Fläche eines regulären Polygons von $2n+1$ Ecken und höchster Art ist die Hälfte des $2(2n+1)$-Eckes höchster Art im selben Kreis. Ders. *Bourget* (1880), nombre relatif des polygons régulières de n et de $2n$. Die Seite zweier korrespondierender regulären Polygone sind Katheten mit dem Durchmesser als Hypotenuse; Derselbe Satz gilt von kongruenten $2n$-Seiten der Art p und der Art $n-p$; ders. *Liouville* (3) 6 (1880), aber mit Vorsicht zu gebrauchen.

(élève) *Lidy, Bourget* 1 (1877) p. 13, Inhalt der Sternpolygone. q Art $= RP \cdot \frac{A_q}{2A_q - 1}$, wo A_q das Apothema des Sternpolygons und P der Umfang des zugehörigen einfachen regulären Polygons.

Th. F. Muir, Messenger 8 (1878) 47, A property etc. Ist π_n das Produkt je einer Seite aller zur n-Teilung gehörigen Polygone, so ist $\pi_n = 1$, außer wenn n die Potenz einer Primzahl p ist; dann ist $\pi_n = \sqrt{p}$ (Kreisteilungsgleichung, *Gauß!*)

e. Kreisteilung, soweit sie nicht zahlentheoretisch:

Einen Kreis in Teile zu teilen, deren Inhalt und Umfang gleich ist.

Simon L'Huilier, Gergonne 1 p. 264, durch die 2 Halbkreise, deren Durchmesser zusammen gleich dem des Kreises sind. (Fig. 18.)

J. D. Gergonne (ibi 6 p. 57), Kreisteilung in Teile von gleichem Umfang und gegebenem Inhaltsverhältnis (cfr. *L'Huilier*).

Praktische Kreisteilung durch den Zirkel, Graf *Pfeil, Grunert* 40 (1863) p. 153.



Fig. 18.

f. Bogenteilung (vgl. Trisektion):

E. Collignon, Statique (1873) p. 277, Paris, graphische Methode.

E. Collignon, Congrès de Toulouse (1888) 18. Jan. *A. Pellet*, Bulletin de la société mathématique de France 16 (1888) p. 113; ders.: Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné; Comptes rendus 105 (1887) p. 1119,

M. Blasendorf, Über die Teilung des Kreisbogens, Berlin 1896; vgl. auch Progr. (1901) No. 124.

Vgl. auch Trisektion. — Die meisten Arbeiten sind algebraisch oder zahlentheoretisch. z. B. ist die zit. Arbeit von *C. Dickson* in den Annals durchaus algebraisch, desgl. aus den Archiv. Néerland. des sciences exactes etc. (*E. H. v. Baumhauer*), *R. Lobatto, Budin, Ghyben, Buys Ballot.*

Segment, das ein bestimmter Bruchteil des Kreises ist: *Emil Lampe,* Mathesis (2) 7 (1897). Allenfalls gehört hierher *Graeber:* Über die pythagoreischen Dreiecke und ihre Anwendung auf die Teilung des Kreisumfangs (approximativ auf 7, 25; 11, 13 . . . angewandt). *Grunert* (2) 15 (1897) p. 439.

8. Trisektion, bezw. Multisektion des Winkels. Das „zweitausendjährige Problem" der Trisektion gehört wie das der Quadratur des Kreises zu den Problemen, an deren Lösung sich die Elementargeometrie eutwickelt hat. Nachdem die Hellenen mittels des Pythagoras die Gleichungen des 2. Grades auf geometrischem Wege gelöst hatten, gingen sie an die des 3. Grades, die sie auf die beiden sogen. Delischen Probleme: Verdoppelung des Würfels und Trisektion eines beliebigen Bogens oder Winkels zurückführten. Nachdem *Vieta* den casus irreducibilis der Gleichungen 3. Grades mittels Trisektion bewältigt und *Descartes*, sowie *Fermat* die Korrespondenz von Gleichung und Kurve als „analytische Geometrie" zur allgemeinen Kenntnis gebracht hatten, war es klar, daß die Trisektion mit Zirkel und Lineal allein unausführbar sei. Den strengen Beweis hat algebraisch *L. Wantzel*, der so früh der Mathematik entrissene, geführt: *Liouville* 2 (1837), p. 366. Der entscheidende Satz findet sich in *F. Klein*'s Vorträgen über ausgewählte Fragen der El.-M. (1895) p. 10 No. 15. Trotzdem ließen die Versuche nicht nach, obwohl die französische Akademie auch hier den Beschluß faßte, keine Lösung zu prüfen. Nicht einmal der Beweis der Unlösbarkeit (von *Grifoni*) wurde eines „Rapport" gewürdigt. Und das Jahrhundert schließt mit einem mißlungenen und wertlosen Versuch eines Pfarrers: Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels allein mit Zirkel und Lineal, 1900.

Die Lösungen zerfallen in 1) approximative mit Zirkel und Lineal, teils Zufallslösungen, teils auf Grund algebraischer oder trigonometrischer Rechnungen, 2) genau mittels fester höherer Kurven, besonders C^2 aber auch C^3 und C^4 und 3) mittels mechanischer Instrumente.

a. Zusammenfassende Darstellungen.

J. E. Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle etc. avec des notes par *J. L. Lacroix,* Paris 1831; hervorzuheben ist der Beweis der Irreduzibilität der Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x + \sin\varphi$ durch Trennung der Wurzeln und den Nachweis, daß $\sin\frac{\varphi}{3}$, $\sin\frac{\varphi+2\pi}{3}$, $\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}$ derselben genügen.

O. Hellwig, Das Problem der Trisektion, Halle (1856).

W. W. Günther, Winkelteilung, speziell Trisektion, Programm Delitzsch (1877).

K. Hesse, Trisektion, Programm Montabaur (1881).

Vañaus, Časopis X (1881), 153, Literatur.

F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, Leipzig (1895) (Beweis der Unmöglichkeit).

M. Blasendorff, Über die Teilung des Kreisbogens, Programm 122. Berlin (1896).

Sigism. Wellisch, Das 2000jährige Problem der Trisektion des Winkels; Zeitschrift für österreichische Ingenieure und Architekten, (1896) p. 21; dort ist auch ein Vortrag von

Gegenbauer erwähnt.

Franc. Mardones, El problema de la Triseccion del angulo, Bd. 101 der Anales de la Universidad de Chile 1898.

Alberto Conti in *Enriques,* Questioni 1900, Artic. 13, dort aber für Näherungen nur Italiener, etwa von 1870 an berücksichtigt.

Über die *arabische* Trisektion *(Hussein),* Corresp. *Quetelet* II, 1826.

Über die schöne Trisektion *Albrecht Dürer*'s von 1525, die erste, in der meines Wissens zunächst statt des Bogens die Sehne geteilt wird, *S. Günther,* Die geometrischen Näherungskonstruktionen *A. Dürer*'s, Programm Ansbach 1886. und *H. Staigmüller, Dürer* als Mathematiker, Programm Stuttgart 1891.

Bibliographisch: *G. Valentin,* Eine seltene Schrift über Winkeldreiteilung, Bibl. math. 1893.

E. Wölffing, Mathematische naturwissenschaftliche Mitteilungen in Württemberg 2, 21—27 zählt über 200 Arbeiten auf.

Ich erwähne hier:

H. Brocard, Mémoire sur divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection, Algier 1874.

Es ist selbstverständlich, daß jede Gleichung dritten Grades auf die Trisektion zurückgeführt werden kann.

b. Annähernde Lösungen.

Querret, Gergonne 16 (1825) p. 108 trigonometrisch.

Capitain Unonius (Malmö), *Grunert* 15 p. 223 (1850).

Veniot, Comptes rendus 66 p. 619, 730 (1868).

Blom (Norwegen) um 1870, der sich viel mit der Trisektion beschäftigt hat.

G. V. Schiaparelli, Regel des Herrn *Baratto,* Rendiconti del Istituto lombardo (2) 2 (1869), praktisch genügend; derselbe hat auch die hübsche Lösung von *Pompeo Monti* auf ihre Genauigkeit geprüft.

R. W. Genese, Messenger (2) 1 (1872) p. 181.

E. Catalan, Mélanges mathématiques t. 1 p. 365.

W. Thiese im „Scientific American" (1877) von *Studnička* in der Časopis reproduziert.

O. P. Dexter, The division of angles, New York 1881, auch mechanisches Instrument.

Emil Lampe, Crelle 100 (auch Multisektion) beliebig genau.

Volksschullehrer *Averdieck,* (überraschend genaue und einfache Zufallslösung) von *K. Schwering* im Programm Coesfeld (1886) mitgeteilt, dazu *E. Lampe, Crelle* 105. Bestimmung der größten Abweichung.

E. Collignon, Association française pour l'avancement des sciences 16. Toulouse (1887).

E. Fortin, ein Ingenieur, hatte, anknüpfend an *Dürer,* gefunden, daß das Lot von einem der Dreiteilungspunkte auf der Sehne bis an den trisezierenden Strahl $\frac{7}{12}$ des Pfeiles ist. *Collignon* diskutiert die Regel für n-Teilung und zeigt, daß, wenn $AOF = \frac{1}{n}$ von BOA $(= \alpha n)$ ist, wenn αn von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ variiert, $DE : AC$ zwischen den engen Grenzen $\frac{2}{3} \cdot \frac{(n^2 - 1)}{n^2}$ und $\frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$ schwankt, wo $CD = \frac{1}{n}$ von BC. (Fig. 19). Im Falle 3 ist $\frac{7}{12}$ ein Mittelwert.

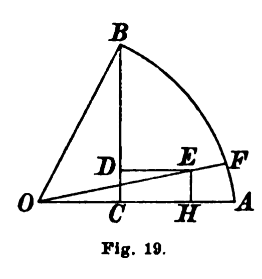


Fig. 19.

Hieran knüpft an:

A. Pellet, Bulletin de la société mathématique de France, 16 (1888) p. 113.

John Bridge, Nature 42 (1890) p. 415. Multisektion, gestützt auf den Satz: Wenn ein zweiter Kreis sein Zentrum O auf der Peripherie eines ersten hat, so schneidet jeder Strahl durch O proportionale Bogen ab.

Die Konstruktion des Bogens von *Göring* (bezw. *Scheffler*) (s. Quadratur) findet sich auch bei *Bridge.*

R. Dorr, Lösung des Problems der Winkelteilung (Fehler durchschnittlich nur 2 Bogensekunden), Programm Elbing (1893).

A. Pegrassi, Mathesis 13 p. 247: zwei Methoden einfacher Art; Educational times (1893) p. 405, Winkel von 120°.

E. Cominotto, Trisez. approssimata dell' angolo, Padova (1895).

Neben einer Konstruktion von *Cominotto,* die selbst für $\varphi = 180$ nur einen geringen Fehler gibt, ist dort eine sehr einfache Konstruktion erwähnt: Man verlängert den halbierenden Radius um sich selbst und verbindet den Endpunkt mit dem diametralen Punkt des einen Schenkels, so schneidet diese Gerade vom anderen Schenkel aus nahezu $\frac{1}{3}$ ab. Der Fehler ist bei 30° nur 2′, wächst dann aber schnell, er ist bei 60° schon über 2°. (*Huygens.*)

Fr. Strempel, Über ein Näherungsverfahren zur Teilung von Kreisbögen. Programm 653 (1894) Rostock, verwandt mit *Collignon* und *Pellet.*

Soll von dem Bogen AF von F aus $\frac{1}{n}$ abgeschnitten werden, so schneide man von der Sehne $FI = \frac{1}{n}$ ab und vom Radius MF das Stück $FG = \frac{3}{n+1}$ und ziehe GI, das den Bogen in E trifft, so ist FE nahezu $\frac{1}{n}$. Der Fehler beträgt bis 30° höchstens 4,84″. *Strempel* hat dann im Programm 748 (1903) durch eine Hilfskonstruktion den Fehler zwischen 30° und 60° auf höchstens 6″ herabgedrückt, vgl. auch

sein Programm Rostock (690) (1898). Die Auffindung des (n – 1)^{ten} Teils, wenn der n^{te} Teil gegeben ist, schon bei *Meibomius* (*Aristides Quintilianus*), s. Streckenteilung.

M. Blasendorff loco sub a. citato setzt als erste Annäherung die Seiten des Dreiecks statt den Sinus den Winkeln selbst proportional: er untersucht die Fehlergrenze E und findet, daß $E < \frac{1}{120}$ des Radius, oder kleiner als 30' für $\varphi \leqq \frac{\pi}{4}$: der Fehler wird durch Halbieren kleiner als der achte Teil. *Blasendorff* gibt dann noch eine Konstruktion mittels des Apollonischen Kreises, welche er im Programm 124 (1901) genauer untersucht.

Ernst Björling, *Grunert* (1896) p. 2.
C. Frenzel, *Hoffmann* 30 (1899) p. 356.

Eine ganze Reihe von Näherungskonstruktionen, „einige sehr genau und staunenswert einfach“, sollen sich nach *S. Wellisch* bei *N. Fialkowski*, Die Teilung des Winkels und des Kreises, Wien 1860, finden. Ich weise ganz nachdrücklich auch auf seine „Zeichnende Geometrie“, 3. Aufl., Wien und Leipzig 1883, hin. Nach der Angabe, die bei *Wellisch* über seinen Interjektor gemacht ist, vermute ich, daß viele davon alt sind.

Von *H. Schoeler*, *Grunert* 3 (4) (1902) p. 128—129 ist eine Multisektion angegeben, welche die n-Teilung auf die ($n+1$)-Teilung in sehr einfacher Weise zurückführt („nach langer Überlegung und Versuchen“), zu der ibid. p. 130 *Emil Lampe* die Fehlerberechnung angibt.

c. Feste Kurven.

Da die Lösung mit Zirkel und Lineal nicht gelang und wegen der imaginären Kreispunkte im Unendlichen auch nicht die Lösung mittels mehrerer Kreise gelingen konnte, so erfanden die Alten andere höhere Kurven: die Quadratrix des *Hippias*, die Spirale des *Archimedes*, die Konchoide des *Nikomachus* und vor allem die Kegelschnitte, wie denn die gleichseitige Hyperbel unmittelbar mit der Dreiteilung zusammenhängt. Dazu gesellte sich später die Strophoïde (*Huygens*), die Kardioïde, der limaçon de *Pascal*, und es wurde allmählich klar, daß jedes Problem, welches auf eine Gleichung dritten oder vierten Grades führt, mit einer festen Kurve zweiten bezw. dritten oder vierten Grades gelöst werden könne, was schon *Descartes* in seiner Géométrie gelehrt hat.

Azémat, Trisection suivie de quelques recherches analyt. sur le même sujet par *J. E. Garnier* 1809 (Kardioïde und limaçon) dazu
L. Poinsot, Recherches sur l'analyse des sections angulaires, Paris 1825.

Mich. Chasles, Cours etc., gleichseitige Hyperbel (Pappus), Traité des sections coniques (1865) p. 36.

Dejardins, Nouv. ann. (1852) p. 128, ibi 15 p. 382. *Toscani*, Fußpunktkurve des Kreises (Kardioïde).

Tietz, *Grunert* 30 (1858) gleichseitige Hyperbel, ibi 34 *J. Walter*, Hyperbel.

Albrich, Programm Hermanstadt 1863.

R. Glotin, Teilung überhaupt und Trisektion, Mémoires de Bordeaux (1863), sehr detailliert, Konchoïde, limaçon, Arbeit eines Laien (s. aber d. Instrumente).

Jouanne, Limaçon de *Pascal*, Nouv. ann. (2) 9 (1870) p. 40.

H. Hippauf, Konchoïde mit zirkularer Basis, *Hoffm.* 3 (1872) p. 215, wie *Curtze* bemerkt, längst bekannt; derselbe mit Fußpunktkurve des Kreises, Leipzig (1872).

E. Lucas, Nouv. correspondance (1872) p. 14 mittels des Zylinders, nach einer Bemerkung von *Descartes*, opera t. 6 p. 56.

Georg Sidler, Programm Bern (1876) (Literatur, Konchoïde).

F. Zebranski, Bulletino delle scienze matem. ed astronom. (1876) p. 278; feste Parabel (*Descartes*).

G. Garbieri, *Battaglini* 15 (1877) p. 111; feste Hyperbel $\frac{1}{9}s^2$, $\frac{1}{3}s^2$, wo s die Sehne (*Pappus*).

A. Radicke, *Grunert* 63 (1879) p. 328.

Vaňaus, Časopis 10 (1881) p. 153, Kurve dritten Grades.

Carmine Aiello, Il Pitagora, 2. Jahrg. No. 4, Limaçon de *Pascal*.

W. Panzerbieter, *Grunert* (2) 10 (1891) p. 322 feste Hyperbel; ders. Programm Berliner Falkrealgymnasium; ders. *Grunert* (2) 11 (1892) p. 344 feste Ellipse, p. 488 Parabel.

Stephan Glaser zeigt ibi (2) 12 (1894) p. 367, daß jede Kurve zweiten Grades triseziert, allerdings sehr umständlich, ibi (1895) p. 446., *L. v. Köppen*; p. 210 *E. Fischer* (trigonom.).

Mariantoni und *Palatini*, Nouv. ann. (3) 18 (1899) p. 126 (Polysektion, reguläres 17-Eck).

W. Heymann, Über Winkelteilung mittels Araneïden, *Schlöm.* 44 (1899) p. 263 (auch für reguläre Polygone).

d. Instrumente.

Instrumente zur Trisektion haben schon die Alten benutzt, *Archimedes* hat mutmaßlich mit einem Streifen oder Lineal die Einschiebung des Radius bewirkt (vgl. *M. Cantor*), *Nikomachus* ein Instrument für seine Konchoïde hergestellt. Instrumente haben auch *Vieta* und *Huygens* konstruiert; einen sehr einfachen Trisektionszirkel hat in den Acta Eruditorum von 1695 p. 290 *Ceva*, der Jesuitenpater, angegeben, den in demselben Band *Tschirnhausen* für sich beansprucht. Instrumente zur Trisektion sind zahllos, es werden immer neue patentiert, vielleicht aus dem Grunde, weil sie niemanden als den Erfinder schädigen.

Instrument zur Trisektion von *T. Tate*, Philosoph. Magazine (4) 19, April 1860 p. 261, schon traité analyt. des sections coniques von *De l'Hôpital* (1707). 2. Aufl. (1776).

(eh. Marinelieuten.) *P. Glotin*, Mémoires de Bordeaux t. 2 (1863) p. 16, sehr einfach und leicht zu handhaben, Beschreibung bei *Blasendorff* (l. c.) und bei *Enriques*, art. XIII.; der Multisektor praktisch unbrauchbar.

E. Saymié, Mondes (2) 22 (1870) p. 248, Instrument zur Archimedischen Spirale (welche mit der Abwickelung eines Kreises in einfachster Beziehung steht), dazu *E. Horst*, *Schlömilch* 24 (1879) p. 407.

A. G. Herschel, Quarterly Journal 4 p. 315, Rechte Winkel in Teilung.

A. Perrin, Winkelteiler, Société mathém. de France 21. Juli (1875), (Konchoïde) wie *Hippauf* (l. c.).

C. A. Laisant, Trisektor (limaçon) 21. Aug. (1875).

G. Emsmann, Einfacher Trisektor (Folium Carteii), *Hoffmann* (9) p. 42.

E. Lucas, Spärischer Kompaß, nouv. ann. (2) 15 (1876) p. 8.

Répécaud, Trisektionszirkel, ibi p. 382.

Qu. Amadori, Sulla trisez. d'un angolo qualunque, Savona 1883; Beschreibung bei *Enriques* p. 457.

Hauptmann *Hermes*, *Hoffmann* 22 (1891) p. 401, mit folgendem, sehr hübschen Trisektionssatz:

Zwei gleiche Kreise M und M_1, gegenseitig durch Zentrum, AB irgend eine zu MM_1 parallele Sehne, so wird AMB durch MS gedrittelt. (Fig. 20.)

A. v. Frank, Papierstreifen, *Grunert* (2) 11 (1892) p. 207.

Alw. Korselt, Über einen Mechanismus etc.; ungerade Teilung mittels *Clauß*-

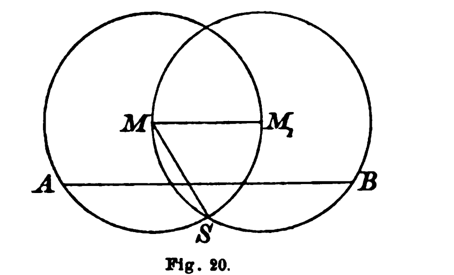


Fig. 20.

Fig. 21.

schen Winkels (Dr. *Clauß*, Jurist, Meerane), *Schlöm.* 42 und 43 (1897 und 1898).

G. de Longchamps, Congrès de Besançon, Association franç. *Bourget* (1894).

A. Strauß, Modell (Lineal mit Winkel, *Grunert* (2) 12 (1894) p. 177.

H. Hartl, Der Rechenwinkel, Reichenberg (1894).

Gulielminetti, Zentralzeitung für Optik und Mechanik (1895).

Sig. *Wellisch* (1896) (l. c.).

K. Frankhauser, Hamburg, Winkelteiler*), patentiert am 11. März (1902).

9. Verschiedene Kreissätze. Vgl. Dreieck, Viereck, regulären Polygon, Ptolemaios etc.

Die *Wogenfläche* des *Archimedes* bei *Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Bd. 1.

Über den ***Arbēlos*** des *Archimedes* hat *J. Mackay*, Proceedings of the Edinburgh mathematical society 3 (1885) p. 2—11 einen Bericht gegeben. Im selben Bande p. 119 eine Note von *Th. Muir* über den A. Der Arbēlos (Schustermesser) ist die von den Halbkreisen AGB, BIC, CMA eingeschlossene Figur. Sie findet sich in den (arabischen) Lemmaten des *Archimedes*, bei *Pappus* Buch 4, p. 15—18;

*) Der praktisch vollkommenste wohl *Fialkowski*'s „Interjector". *F.* hält seine Lösung für absolut richtig, das ist sie nicht, da der Bogen, den er braucht, theor ein Kardioïdenbogen ist, aber äußerst wenig vom Kreisbogen abweichend.

wird von *Steiner, Crelle* 1 p. 47 (Kreisringe) behandelt und in the Ladies' and Gentlemen's diary 1842 und 1846. (Fig. 21.)

Der Arbēlos ist unserm Schulunterricht bedauerlicherweise ganz verloren gegangen; er ist bei *G. Paucker*, 1823, Königsberg, behandelt, bei *van Swinden* (*Jacobi*) S. 213, auch von *F. W. Fischer, Grunert* (1881) p. 337, *J. Chph. Sturm*, hat schon in der Geometria enucleata (1695) p. 372 die Radien der beiden Berührungskreise in der Figur berechnet.

Der Umfang des A. ist gleich dem des Kreises über AB, der Inhalt gleich dem des Kreises über CG. Die beiden Kreise, welche so eingeschrieben sind, daß sie CG berühren, sind gleich. Beweis: Lemma 5 und the Gentlemen's diary (1833) p. 40. Die gemeinsame Tangente in M geht durch B und die in I durch A.— Wenn AG Kreis AC in T und BG Kreis CB in W schneidet, so ist TW gemeinsame Tangente beider Kreise und $CTGW$ ein Rechteck. Der Satz ist ein Spezialfall des folgenden in Leybourn's Mathematical repository (Neue Serie) 6 t 1 p. 209:

Wenn AB ein Halbkreis und CG senkrecht zu AB und ein variabler Kreis HIK sowohl CG als Bogen GB berührt, so ist die Tangente AI an ihn konstant. (Der Satz gilt für jede Lage von CG.) Der Arbelos ist gleich dem kleinsten Kreis, der die beiden Berührungskreise umschließend berührt etc.

Nicht bei *Mackay* erwähnt: Correspondance *Quetelet* 2 (1826), *Groetaers* p. 259, *A. Lechevain* und *Daubresse*, auch *R. Lobatto*, welche u. a. beweisen, daß die gemeinsame Tangente der beiden Teilkreise AC und CB gleich CG (und von CG halbiert wird).

Fermatscher Satz: Errichtet man über dem Durchmesser AB eines Halbkreises ein Rechteck $ABCD$, dessen andere Seite gleich der Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates ist, und verbindet C und D mit einem beliebigen Punkte E der Peripherie, welche AB in G und F schneiden, so ist $AG^2 + BF^2 = 4a^2$.

Von *Euler*, der ihn Novae commentationes, Acad. scient. imp. Petropol. 1 (1750) p. 49, geometrisch bewiesen, *Fermat* zugeschrieben (*Fermat*, Varia opera math. (1689) p. 118), wie auch von *R. Simson*, Opera quaedam reliqua, Glasgow (1776) p. 83, von *Grunert*, Grun. 27 p. 116 reproduziert.

Grunert 30 (1858) p. 12, *Ch. Lindmann* (lat.).

ibid. *Heinen*, p. 276; einige Beweise, der letzte am kürzesten.

ibid. 31 p. 66 *A. Krüger*, auf die Ellipse ausgedehnt und vervollständigt (Rechteck nach innen); ibid. p. 295, *Blindow*, vervollständigt.

Blindow (Fraustadt), *Grunert* 32 p. 124, ibid. 46 (1866) p. 1, *L. F. Ofterdinger* sehr vollständig. (Satz II erwähnenswert), im Anschluß daran

p. 11, *Ch. H. Nagel*, hübsche Zusätze, Trapez betreffend.

Grunert 50 (1869) p. 111—12, *W. Stammer;* vielleicht der einfachste Beweis.

Nouvelles annales (2) 9 (1869); hübscher Beweis in einer Note von *Gerono*, p. 43, vorher *Bottiglia*.

ibid. p. 189. *E. Lionnet*, synthetisch.

Battaglini 7 (1869) p. 377, *Vito Eugenio* (trigonometrisch); ibid. 378, *Tarquinio Fuortes* (elementargeometrisch).

Eine verspätete Verallgemeinerung auf Ellipse von *O. Schlömilch*, Zeitschrift 10 (1874) p. 462.

Rechnerisch:

M. Simon, Sammlung *Schubert* 8 (1900) p. 112, für Ellipse p. 227.

Mascheroni-Konstruktionen heißen die Konstruktionen, bei denen

nur der Zirkel als Hilfsmittel gestattet ist, nach dem Vorgange *L. Mascheroni's*, der in „La geometria del compasso“, Pavia 1797 zeigte, wie man sämtliche Aufgaben 1. und 2. Grades statt mit Zirkel und Lineal nur mit dem Zirkel lösen könne. *Mascheroni* gab dann im letzten Kapitel auch Näherungskonstruktionen für Kreisteilung, Winkeldrittelung, Würfelverdoppelung etc. mit dem Zirkel. Schon 1798 wurde *Mascheroni*

ins Französische übersetzt von *Carette* 1828, 2. Aufl., von *Cayley* in seinem Bericht über *Mascheroni*, *Messenger* 14 (1885) p. 179 erwähnt; deutsch 1825 von *Grüson*.

Im Anschluß an die Aufgabe: Gegeben 3 Kreise, auf jedem je einen Punkt so zu bestimmen, daß ein gleichseitiges Dreieck entsteht, gibt

P. Breton, Nouvelles annales 9 (1858) p. 299 ein kurzes Referat.

Ausführlich ist:

J. Frischauf, Die geometrischen Konstruktionen vou *Steiner* und *Mascheroni*, 1869 und das Progr. (1873, Brandenburg a. H.) *Ed. Hutt*, 2. Aufl. Halle 1880.

Géométrie élémentaire du compas par *B. E. Cusinery* 1851.

G. Delisle, Nouv. annal. 19 (1860) p. 35, Zentrum eines gegebenen Kreises.

Frz. Bessell, *Grunert* 67 (1881) p. 44, regelmäßiges 5-Eck, Durchschnitt zweier Geraden etc. *J. Colette*, Nouv. annal. (3) 8 (1889) p. 512. Halbierung des Bogens etc.

Delahaye, Mathesis 12 (1892) p. 157, Proportion.

A. Adler, Zur Theorie der *Mascheroni*schen Konstruktionen, Wien. Akademie (1891) (hierin schon die Teilung des Kreises in 17 Teile (s. *Gérard* und *Mulsow* bei regulärem Polygon); ders.: *Zur Theorie der geometrischen Konstruktion*, Programm Pilsen 1895 (Konstruktion des inversen Punktes und damit Fruktifizierung des Prinzips der reziproken Radien für *Mascheroni*sche Konstruktionen), vgl. auch: *Wiener Berichte* 90 (1890) p. 46.

Eugène Dubouis, La géométrie du compas, *Bourget* 22 (1897) p. 53; id. (1900) *La théorie de Mascheroni* (Vannes 8).

A. Mannheim, Remarques sur les constructions géométriques, *Messenger* (2) 27 (1897).

E. Cesàro, Mémoires de la société royale des sciences de Liège (1899); Les problèmes de géométrie résolus par le compas.

G. Mulsow, Programm Schwerin (1898).

E. Daniele, Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso, im Sammelwerk von Enriques: ***Questioni riguardante la geometria elementare***, Bologna 8 (1900); die ersten 8 Paragraphen sind Referat, wo auch *Adler* in 7 und 8 berücksichtigt ist und in Paragraph 9 eigene Konstruktion.

Im Anschluß an die *Mascheroni*sche Konstruktion sind die Konstruktionen mit Lineal und konstanter Zirkelöffnung zu erwähnen, wie sie *Abul Wafa*, *Leonardo da Vinci*, *Dürer*, *Ferrari*, *Tartaglia*, *Cardano*, *Poncelet* und *Steiner* ausgeführt haben.

Die Geschichte bei *W. M. Kutta*, Zur Geschichte der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung, Halle 1897 (Kaiserl. Leopold. Carolina), inzwischen ist es durch

Max Curtze, Anaritii commentarium (Supplement zu *Heibergs* Euklid 1899) fast sicher, daß diese Konstruktionen schon dem *Heron* bekannt waren.

Kreissätze:

Meyer Hirsch, Geometrische Aufgaben 1 (1804). Ähnliche Abbildung eines Kreises von einem gegebenen Punkt aus p. 227, § 124; Kreissätze in §§ 126, 128, 132, 134, Bd. 2 (1807).

Gegeben sind n Punkte, A_1 etc., und es soll der Ort der Punkte P bestimmt werden, so daß $\Sigma m_x PA_x^2 =$ konstant; Ort: *Kreis* um den Schwerpunkt (*Mathew Stewart,* General theorems).

Guénaud d'Aumont, Gergonne 12 (1822) p. 279. Im Kreisviereck, dessen Seiten Bogen von Kreisen sind, sind die Summen zweier aufeinander folgenden Winkel gleich. Derselbe Satz bei *A. Miquel, Liouville* 9.

J. Steiner, Crelle 1 (1826) p. 278; legt man an einen Kreis zwei parallele Tangenten AD und BC, welche den Kreis in A und B berühren, zieht AEC beliebig (E auf den Kreis) und legt in E die Tangente FG, so halbiert sie BC in G, und es ist: $AD \cdot BC = AB^2$; $BG \cdot AF = r^2$. (*Steiner* nennt die Sätze bekannt.)

J. Plücker, Crelle 11 p. 222; *Miquel, Liouville* 9 (1844) p. 20; *Möbius,* Kreisverwandtschaft 47.

Wenn in einem Kreisbogendreieck ABC die Summe der Winkel π, so schneiden sich die Kreise der Bogen in *einem* Punkte.

Kreisbogendreieck: R. Lachlan, Quarterly Journal 21 (1885) p. 1; (s. auch London Mathem. society proceedings 21 p. 213) ohne sphärische Trigonometrie.

E. F. August, Crelle 17 (1837) p. 389. Wenn man innerhalb eines Kreises einen Punkt zum Zentrum eines ebenen regelmäßigen doppelt ungeraden Strahlensystems wählt (z. B. 10 Strahlen), und die Strahlen als durch die Peripherie begrenzt ansieht, so ist die Summe aller ungerade gezählten gleich der der gerade gezählten.

A. Miquel, Liouville 3 (1838) p. 485: 1) Wenn 3 Kreise A, O, C sich in I schneiden und wenn F beliebig auf A mit den Schnittpunkten von A und C und A und O, nämlich R und N verbunden wird und AR Kreis C in D und AN Kreis O in E schneidet, so geht DE durch den Schnitt M von O und C, dazu zwei Umkehrungen, die eine der Satz von dem Umkreise der vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits, die andere der Satz: Wenn man auf den Seiten des Dreiecks ABC beliebig je die Punkte D, E, F wählt, so schneiden sich die drei Kreise AEF, BFD, CDE in I. Damit hat man den Satz vom *Pentagon:* Pentagon $ABCDEA$. Bringt man je zwei durch eine getrennten Seiten zum Schnitt, so setzen sich auf die 5-Eckseiten die 5 Dreiecke mit den Spitzen $KLFG$, und die aufeinander folgenden Umkreise schneiden sich in 5 Punkten $PQMNR$, diese sind konzyklisch; der Satz kann auch lauten: Die 5 Geraden bestimmen 5 vollständige Vierseite, deren 4 Dreiecksumkreise je einen Schnittpunkt haben, diese 5 Punkte bestimmen einen Kreis. In dieser Form ist der *Miquel*sche Satz von

W. K. Clifford, Mathem. papers (1868), Cambridge and Dublin, *Messenger* 5 (1871) p. 125—141 verallgemeinert: 6 Gerade bestimmen 6 Fünfseite, deren *Miquel*sche Kreise sich in *einem* Punkte schneiden, die 8 Punkte der 7 Sechsseite eines Siebenseits liegen wieder auf einem Kreis und so fort in infinitum.

Zusatz: Vgl. dazu die Arbeiten über eindeutig bestimmte Berührungskreise gerichteter Geraden von *Loud*, American M. S. Trans. I, 323 (1900) und *C. E. Brooks, Johns Hopkins* Univ. Circ. 22, p. 5 (1902).

Crelle, 19 (1838) p. 205, *Bauer,* beweist den Satz aus 9 p. 102: Dreht sich ein rechter Winkel in der Ebene eines Kreises O um den Scheitel C, so ist der Ort der Mitte der Sehnen zwischen den Schenkeln ein zweiter Kreis, dessen Mitte in der Mitte von CO liegt.

Crelle, 23, *A. R. Luchterhand,* Relationen zwischen den 6 Verbindungen von 4 Punkten auf einem Kreis, 5 Punkten auf einer Kugel.

H. Schmidt, Zur Theorie des Kreises, Programm Halberstadt (1840).

F. I. E. Lionnet, Nouvelles annales 5 (1846) p. 449. Wenn n beliebige Punkte in der Ebene gegeben sind, den *kleinsten* Kreis zu bestimmen, der sie einschließt. (Wichtig für Funktionentheorie.)

J. Quidde, Bückeburg, *Grunert* 23 (1854), Kreisbüschel p. 130—206, *elementargeometrisch,* die *Poncelet*schen Schließungssätze (s. dort).

Ed. Nöggerath, ibid. 33 (1859) p. 329; die 3 Zentren der 3 Isogonalkreise (über den Ähnlichkeitspunkt) liegen in *einer* Geraden. Apollonischer Kreis durch Zentren etc. Im übrigen siehe die Büschelsätze bei Taktion. Viel Material zu Aufgaben bei *Th. Reye,* synthetische Geometrie der Kugel, *A. Milinowski;* Sammlung *Schubert* 8, *W. Pflieger* etc.

. (Schüler) *Devaux,* Nouvelles annales 15 (1856) p. 226 und 228; Inhalt des Dreiecks aus den gemeinsamen Tangenten zweier Kreise.

J. Harcourt, Nouv. annal. 19 (1860) p. 437; Satz über das umgeschriebene Dreieck.

Dés. André, Nouv. annal. (2) 9 (1870) p. 246. Das Produkt der Lote von einem Punkte eines Kreises auf alle Seiten eines eingeschriebenen Polygons ist für alle Polygone mit denselben Ecken konstant (general theorems).

A. Enneper, Schlömilch 16 (1871) p. 257. Gleichungen in Radien und Zentralen dafür, daß sich 3 Kreise in *einem* Punkte schneiden.

G. Affolter, Battaglini 11 (1873) p. 110. Zwei polare Dreiecke eines Kreises liegen perspektivisch (elementarer Beweis [*Menelaos*]); ders. *Clebsch* Annalen 6 p. 597.

C. A. Laisant, Nouvelle correspondance 2 (1875) p. 184. Sätze über Kreispotenzen im Viereck, Kreispotenz $c^2 - (r^2 + \varrho^2)$ nach *Darboux,* ebendort Sätze über Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise.

H. Brocard, Nouvelle correspondance 3 p. 175. Zwei Kreise berühren sich in A, durch A zwei Sekanten BB' und CC', die Umkreise von ABC und $AB'C$ schneiden sich auf einem Kreise, der die beiden gegebenen in A berührt; ibid. (1880) p. 161. *E. Cesàro.* (*Gergonne* 15, *Sturm*).

F. Bing, To analoge Sätninger om rette Linier og Cirkler, *Zeuthen* Tyd. (5) 1 (1883), p. 190. Der Fundamentalsatz von Parallelen, geschnitten durch einen Strahlenbüschel, bleibt gültig, wenn die Parallelen durch konzentrische Kreise um ein bestimmtes Zentrum, und die Strahlen durch Kreise ersetzt werden.

A. Mannheim, Messenger 12 (1883) p. 175. Sind s und s' zwei konjugierte Sehnen durch einen Punkt, so ist $s^{-2} + s'^{-2}$ konstant.

J. Casey, A sequel to Euclid, Das Rechteck von den Loten eines Kreispunkts auf zwei Tangenten ist gleich dem Quadrat des Abstands von der Chordale. *Die Differenz der Quadrate der Tangenten von einem Punkt an 2 Kreise ist gleich dem*

doppelten Rechteck aus der Zentrale und dem Abstand des Punktes von der Radikalachse.

Fr. Niemöller beweist *Schlömilch* 30 (1885) p. 251 aus der *Potentialtheorie* den Satz: Gehen von der Spitze C eines Dreiecks $n-1$ Gerade zu AB, so gilt für die Durchmesser d_x der in die n Teildreiecke eingeschriebenen Kreise der Satz: $\Pi\left(1-\frac{d_x}{n}\right)=1-\frac{d}{n}$, auf p. 307 beweist ihn *Schlömilch* elementargeometrisch, nebst Folgerungen.

Prof. *G. Chrystal,* Konstruktion des kleinsten Kreises, der n gegebene Punkte einer Ebene einschließt; Bulletin de la société française 13 (1885) p. 198 und Edinb. Proceedings 3 (1885) p. 30; Frage von *Sylvester,* Quarterly journal 1857 p. 79; aber schon Nouv. annal. 13 (1854) p. 449, *E. Lionnet,* vgl. zu *Chrystal* auch *Maur. d'Ocagne,* Bd. 12, des zit. Bulletin (1884) p. 168.

G. Pesci, Dei circoli etc. Besso Periodico No. 120.

C. Reinhardt, Schlömilch 32 (1887) p. 183, die 4 Punkte, in welchen sich von den 4 gemeinsamen Tangenten zweier Kreise je eine äußere und eine innere schneiden, liegen auf einem Kreise, dessen Durchmesser die Zentrale ist (konzentrisch zu dem Kreis der 4 Berührungspunkte der äußeren und dem der 4 inneren).

H. Bleicher, Hoffmann, 19 (1887) p. 415; Satz von *Miquel* über das Fünfeck, Zusatz über Höhen im Dreieck und Höhenabschnitt (*J. Mention,* Nouvelles annales 2, 1).

Ad. Beyssell, 2 Kreissätze *Grunert* (2) 3 (1886) p. 335.

C. Leudesdorf, Messenger 19 (1888) p. 14. On the inversion of some theories in elementary geometry; interessante und schwierige Sätze über Berührung von Kreisen durch Kreis.

Frégier's Satz 1816. S. *Kötter*'s Bericht in Deutsche Math.-Ver. 5, p. 44.

Anonym *Frégier*scher Satz: *Bourget* 14 (1891) p. 50; synthetisch und elementar. Der Satz gilt für alle Kegelschnitte, vgl. Sammlung *Schubert,* VIII, § 43 Aufgabe 34; hier ist er in allgemeinster Fassung durch *Inversion* bewiesen.

M. d'Ocagne, Bourget 4 (2) (1893) p. 216: Wenn 3 Kreise A, B, C sich zu je zweien berühren in α, β, γ, so ist $\frac{\triangle\, ABC}{\triangle\, \alpha\beta\gamma}=2\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}$.

H. Thieme und *Schur, Hoffmann* 25 (1893) p. 575. Beweis, daß die Projektion der Projektion eines Kreises wieder die Projektion eines Kreises ist.

A. Schönflies, Clebsch 44 (1894) p. 105; allgemeinstes Flächenstück (eventuell mit Wendungspunkten), welches von gegebenen Kreisbogen begrenzt werden kann. Kreisbogendreiecke und Vierecke. Gestaltliche Unterscheidung (Zusammenhang mit *Felix Klein,* Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe; *Clebsch* 37, und *Schilling,* Über *Schwarz*sche s-Funktion, der die Kreisbogendreiecke im wesentlichen absolviert hat, aber *Schönflies* ist elementar); vgl. auch *Miquel, Liouville* 9.

V. Reyes Prosper, Existenz der Radikalachse, unabhängig vom Parallelenaxiom Progreso 5 (1895) p. 205.

W. Godt, Clebsch Annalen 47 (1896). Über eine merkwürdige Kreisfigur (Kreise mit „Sinn").

E. Barisien, Mathesis 16 (1896) p. 35. Das Dreieck gebildet aus den gemeinsamen Tangenten je zweier von drei Kreisen.

Eine selbständige Lehre vom Kreise: *M. J. M'Clelland*, A Treatise of the geometry of the circle (1891).

Aufgaben aus den Educ. times, vielfach die Potenz betreffend, und oft hübsche Sätze enthaltend:

(1882) 49, 5592 *Morel;* **Potenz:** *Prince* **11 467, 11 580** *Bernès;* **11 885** *Arnold;* **(1894) 60, 549** *Scale.*

Die Längen der gemeinsamen Tangenten seien t_1 und t_2, dann ist das anharmonische Verhältnis, in das sie jede andere teilen, $(t_1 - t_2):(t_1 + t_2)$; 11 845 *Macleod,* **483** *Scale;* **1204** *Fleuranceau,* **61 (1894) 530,** *Lampe;* **2775** *Wilson;* **9895, 62 p. 91** *Sanjána;* **4145** *Hudson;* **12 431** *Miller* (Pol und Polare); **12 284** *Chartres;* **12 239** *R. Tucker,* **3 Kreise berühren** *AB* **und** *AC*, **zwei gehen durch das Zentrum des mittleren, so Radien in harmonischer Proportion; 12 352** *Hillyer;* **(1898) 69, 8476** *Mahendra Nath Ray;* **10 932** *Coupeau;* **(1899) 70, 13 475** *Brierley* **(Radikalachse); 13 821** *Davis;* **13 697** *Droz-Farny.* Wenn *AB* und *CD* zwei Sehnen, α und γ ihre Mitte und *AB* den Winkel $C\alpha D$ halbiert, so halbiert *CD* den Winkel $A\gamma B$ (Pol und Polare); **(1899) 71** p. 109 *Casey:* Zentrale und Radien zweier Kreise gegeben? das endlose Band; **13 950** *Barrett* p. 58; Wenn *O* Ähnlichkeitspunkt zweier orthogonalen Kreise in *A* und *C* und die Polaren von *O* die Zentrale in *B* und *D* schneiden, so ist *ABCD* ein Quadrat; **13 892** *Curjel;* **(1900) 72** p. 48 *Mc Kenzie,* hübsche Aufgaben.

10. Inversion. Inversion, auch Kreisverwandtschaft (*Möbius*) oder Transformation durch reziproke Radien (*Plücker*).

Wir haben zu beginnen mit den *inversen* Punkten *Poncelet*'s im Traité des Propriétés projectives von 1822, von *Steiner* in den geometrischen Konstruktionen von 1832, welches Werk eine Ausführung des *Poncelet*schen Gedankens (Artikel 855) ist, Potenzhaltende Punkte genannt. Dann folgt *A. Quetelet,* Mémoires Bruxelles 4 (1827) und *L. J. Magnus,* Crelle 8 (1832) p. 51: nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie, und ganz klar tritt die neue Verwandtschaft auf bei *J. Plücker, Crelle* 11 (1844) p. 219—225 als Prinzip der reziproken Radien und findet schon dort Anwendung auf das Taktionsproblem. Übrigens ist das Prinzip schon bei *Steiner, Crelle* 1 (1826), „Einige geometrische Betrachtungen" 20, Schluß, angedeutet.

H. Bellavitis, Annali delle scienze, Padova 17 (1836) p. 126 kommt auf die Inversion (ohne ihre Bedeutung klar zu erkennen) in ganz ähnlicher Weise wie *Möbius* von dem Grundgedanken, mit Länge und Richtung der Strecke gleichzeitig zu operieren (Methode der Äquipollenzen, *Hamilton*'s Quaternionen, *Graßmann*'s Ausdehnungslehre, *Möbius*' Longimetrie und Planimetrie). *Bellavitis* beansprucht *Tortolini* 3 p. 60 nachträglich die Priorität gegenüber *Stubbs* und *Ingram,* die selbständig 1842, Transactions of the Dublin Philos. society, und *J. W. Stubbs* Philosophical magazine 23 (1843) Nov. p. 338 auf die Inversion kamen, ebenso wie der große Physiker Sir *William Thomson,* von mathem. physikal. (Potentialtheorie) Problemen aus: *Liouville* 10 p. 364 „image" für inverser Punkt, Brief an *Liouville,* Journal 12 p. 265. Eine ausführliche Theorie zuerst *J. Liouville, Liouville* 12 (1847) p. 276. *Liouville* zeigt analytisch, daß die Inversion (Transformation par rayons vecteurs réciproques) die einzige Transformation ist, welche konforme (winkeltreue) Abbildung im Raum gibt, ferner, daß beliebig viele Inversionen durch eine einzige ersetzt werden können, ein Satz, den *Liouville* (2) 16 (1878) *A. Mannheim* geometrisch beweist.

A. Möbius, selbständig, implicite, wie *Bellavitis,* durch den Gedanken mittels der komplexen Zahl die Gerade auf die Ebene abzubilden, Longimetrie; dann explicite: „Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren", Gesammelte Werke 2 (1853) p. 205, Leipziger Berichte, Bd. 5; ausführlich: *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, Leipziger Abhandlungen,* Bd. 2, Ges. W. 2, p. 243 (1855). Die *Möbius*sche Kreisverwandtschaft ist insofern etwas allgemeiner, als er die Zentren nicht zusammenfallen läßt.

Anknüpfend an *Thomson* und *Liouville:*

A. Hart: Cambridge and Dublin journal, Febr. 1853; Inversion einer Kurve, indem man für den Radius Vector r setzt: $k^2 : r$.

E. Catalan, Liouv. 19 (1854) p. 182, *Stereograph. Projektion.* Alle Systeme orthogonaler Kreise auf gegebener Kugel.

P. Serret, Des méthodes en géométrie C 2 (1855) p. 21, eigene Anwendungen.

N. Ferrers, Quarterly journal 3 (1857) p. 32, *Ptolemäos,* Satz über die Winkelhalbierende durch Inversion (verbunden mit reziproken Polaren).

E. Heis, Grunert 30 p. 354, Stereographische Projektion, einfacher Beweis der Konformität.

R. Townsend, Chapters on the modern geometry of the point, line and circle t. 1 (1863), t. 2 (1865), dort Kap. 9 Inversion, wohl das erste Lehrbuch (für Mittelschulen), in dem die Inversion und Kreisbüschellehre ausgedehnte Berücksichtigung gefunden hat.

John Casey, Quarterly journal 7 (1866) p. 378, Sätze über intervertierte Kreise; ders. Educational times $t^2 : rr'$ (wo t gemeinsame Tangente) konstant, von *Vaison,* Nouv. annal. (2) 5 (1867) p. 184 bewiesen. *Hart*'s Ausdehnung des *Feuerbach*schen Satzes: Proceedings Irish society 1866 (s. *Feuerbach*).

O. Böklen, Grunert 31, Über 3 geometrische Transformationen.

Theodor Berner, Schlömilch 11 (1866) p. 34; jede Linie, welche eine Linie größten Flächeninhalts ist, behält diese Eigenschaft bei Inversion.

F. Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie 1869, eine sehr verdienstliche Schrift, in der das letzte Kapitel der Inversion gewidmet ist, dort ist auch das *Steiner*sche Problem der Kreis- bezw. Kugelreihe, welche berührend in den Raum zwischen zwei ineinander liegenden Kreisen oder Kugeln gelegt ist, durch Inversion auf konzentrische Kreise oder Kugeln gelöst, auch die stereographische Projektion behandelt.

T. Clasen, Transformation durch reziproke Radien, Programm Nordhausen 1872, dort Inversion der Parabel: Cissoïde und Kardioïde etc., ders. Programm Holzminden 1878; Über die durch Kreise mit gemeinsamen Schnittpunkten erzeugten Gebilde (Inversion der Kegelschnitte).

G. Salmon, Nouv. correspondance 2 (1875); *Cochez, Bourget* (1877) p. 225, 257, 321 unter anderm: Anwendung auf den Satz von *Mannheim* (*Catalan* p. 122): Die Umkreise aller Dreiecke mit festem Winkel und festem Inkreis berühren einen festen, dem Winkel eingeschriebenen Kreis; ders. ibid. 1878 p. 2, p. 69, Pythagoras als spezieller Fall des Ptolemäos, der durch die Simsonsche Gerade mit Inversion bewiesen wird. *W. Godt,* Kreisbüschel, reziproke Radien (nicht eigentlich elementar) *Crelle* 84 (1878) p. 259.

A. Morel, Bourget (1878) p. 353, Théorie des axes radicaux etc. Die Figur, bestehend aus drei Kreisen, ihren 6 Kreisen mittlerer Potenz und ihren 8 Berührungskreisen, ist unveränderlich in bezug auf das Radikalzentrum als Zentrum der Inversion. Fortsetzung (1879) p. 1. Satz von *Hart,* Die 8 Kreise, welche

3 Kreise berühren, sind zu je 4 tangential zu den 6 Kreisen, erhalten durch Inversion, bei der die beiden letzten ineinander übergehen.

J. Casey, Bedingung, daß 4 Kreise einen fünften berühren, durch Inversion, $AB \cdot CD \pm AD \cdot BC \pm AC \cdot BD = 0$, wo AB etc. die gemeinsame Tangente, vgl. Ptolemäos. Quarterly Journ. 1 (1857) p. 219.

H. M. Taylor, Messenger 7 (1878) p. 148, Inversion beim Problem, in einen Kreisring *ein* System berührender Kreise einzuschreiben; dazu p. 167 *W. W. Taylor*. Ebenso *A. Schumann*, Die *Steiner*schen Kreisreihen, Progr. Berlin 1883.

R. Graham, Durch Inversion den Satz: Jede Tangente eines Kreises wird harmonisch geteilt durch die Seiten eines umschriebenen Quadrates bezw. Achsentrapez.

Th. Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln (Leipzig 1879), Literatur (Vorwort); Inversion unter dem Gesichtspunkt des Kugelgebüsches, d. h. der Gesamtheit aller Kugeln, welche dasselbe Radikalzentrum haben (Kreisbündel); vollständige Erledigung des Taktionsproblems inklus. des *Steiner*schen, Zusammenhang der Inversion mit der Polarisation.

H. Wehr, Reziproke Radien (analytisch), Programm Klagenfurt 1881.

J. Casey, A sequel to Euclid (1881) Dublin (5. Aufl. 1888); Theorie der Inversion. Sekt. 4, Bch. VI, u. a. Satz: Wenn 4 Kreise wechelseitig orthogonal sind und eine Figur intervertiert wird mit jedem der Kreise der Reihe nach als Inversator, so wird die 4. Inversion mit der Originalfigur identisch. (Ausdehnung auf 5 Kugeln mit ganz elementarem Beweis von *John Mackay*.)

J. Larmor, Messenger 13 (1884) durch Inversion *Poncelet*scher Schließungssatz auf Kreisring übertragen, wie bei *Schumann*, d. c.

E. Laguerre, Nouvelles annales (3) 1 (1882) p. 542, verwandt mit der Inversion Transformation par semidroites réciproques. Taktion mit Inversion und dieser Transformation: 5 Kreise in 2 Strahlen und 3 Punkte; ibid. (3) 2 (1883) p. 248; Aufgaben von *Collines* p. 249, *Maur. d'Ocagne*. Ähnlich ist auch die Transformation von *Coelingh* (Amsterdam); ibid. (3) 7 (1888) p. 133; vgl. auch *Bernès, Bourget* (1891), Transformation par inversion symmétrique, (1892) Fortsetzung.

M. Taylor, Messenger 16 (1887) p. 143, Ort der Zentren der mittleren Entfernung für beliebig viele Inversionen, Ausdehnung der Isogonalität.

A. Mannheim, Messenger (2) 19 (1890) p. 17, Note de géometrie à propos d'un théorème de *M. Stewart*. Inversion aus der Relation zwischen den Diagonalen eines Kreisvierecks $e:f$.

J. Finsterbusch, Programm Werdau (1890).

Chr. Wolff, Prinzip der reziproken Radien, Erlangen (1891). *Bernès, Bourget* (1891) p. 121: Symmetrische Inversion.

C. A. Laisant, Mathesis 10 p. 224 (1890).

M. Fouché (Orth. Trajekt.; Potenz etc.): Bulletin de la société mathém. de France (1898).

L. Orlando, Mathesis (1899) p. 112, das Taktionsproblem durch Inversion.

Die Inversion ist nicht nur in die schweizer, französischen und englischen Schulbücher, wie *Rouché* et *Comberousse, M. Clelland*, A treatise etc. (1891), sondern neuerdings auch in die der Deutschen übergegangen, z. B. *Henrici* und *Treutlein, W. Pflieger*, Elementare Planimetrie, Sammlung *Schubert* (1902).

Stereographische Projektion, unabhängig von der Inversion (*Clavius, Adrian Metius*): *Hachette*, Correspondance sur l'école polytechn. 1 p. 362; 2 p. 242.

G. P. Dandelin, Gergonne 16 p. 322, die Grundeigenschaften, ganz elementar.

E. Bobillier, Correspondance mathém. de Quetelet 4 (1828) p. 158 und dadurch veranlaßt:

M. Chasles, Gergonne 19 p. 157 und *Liouville* 7 (1842), p. 272, wo sich ein sehr einfacher Beweis findet, daß das Zentrum des Kreises nn', der einen Kreis NN' projiziert, Projektion der Spitze des NN' umschriebenen Kegels ist.

Wohl die wichtigsten Arbeiten sind die von ***Dandelin,*** Mémoire sur l'emploi des projections stéréograph. en géométrie, Académie de Bruxelles (1827) p. 11—47 (hinten), wo *zuerst* die Kugel, welche 4 Kugeln berührt, mittels stereom. Projektion, id est Inversion, konstruiert ist, und *A. Quetelet,* ibid. p. 49. (Winkeltreue, Kreis in Kreis, *Chasles*scher Satz vor *Chasles* etc.) Auf diese Arbeiten greift zurück:

G. Pelz, Stereographische Projektion, Prager Berichte 31 (1898). Ganz elementar ist auch

E. Reusch, Die stereographische Projektion, Leipzig (1881).

Pädagogisch: *A. Ziegler, Hoffmann* 3 (1872) p. 151.

Geschichte der Inversion: *M. Chasles,* Rapport sur les progrès de Géométr. (1870) p. 140, wo aber *Chasles* aus Unkenntnis der deutschen Sprache die Deutschen ausgelassen hat, z. B. *G. S. Klügel,* Geometr. Entwickelung der Eigenschaften der stereometrischen Projektion, Berlin (1788).

Inversoren (Geradführer).

Das Problem einer exakten Geradführung, welche das *Watt*sche Parallelogramm nur annähernd herstellte, löste zuerst der französische Genieoffizier *Peaucellier* (1864) mit seinem „compas composé“, einer mit Gelenken in den Ecken versehenen Verbindung zweier Rauten, deren eine Ecke fest (Zentrum der Inversion), während durch einen Zügel eine Ecke der kleineren Raute gezwungen wird einen Kreis zu beschreiben. Obwohl das Instrument durch *Mannheim* der Pariser Philomathischen Gesellschaft 1867 mitgeteilt wurde, blieb es so unbeachtet, daß es 1871 von *Lipkin,* einem russischen Studenten in St. Petersburg, wiedergefunden wurde. Erst durch einen Vortrag *Sylvester*'s in der Royal Institution (1874) (veröffentlicht Revue scientifique (1874 et 1875)) wurde *Peaucellier*'s Erfindung bekannt, und nun folgten die Inversoren von *Sylvester, Kempe, Hart.* Durch die Arbeiten von *Sylvester, Hart, Clifford, Robert*'s, *Cayley, Mannheim* wurde auch das allgemeine Problem gelöst: Mittels artikulierter Gestänge von einer Kurve zu einer anderen überzugehen. Man findet die Literatur bis zum Jahre 1882 in einem Artikel von *Liguine* Darboux Bull. (2) 7, p. 145—160, bis 1886 in einer Broschüre von *J. Neuberg*: Sur quelques systèmes de tiges articulées, Lüttich (1886). Seit dieser Zeit ist zu erwähnen:

A. Mannheim, Messenger 26 (1897) p. 152, Inversor von *Hart.*

Vgl. hierzu den Bericht von *E. Kötter* im Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 5, p. 98 ff., den Ref. nicht mehr benutzt hat.

11. Taktionsproblem. Es sind in der Geschichte des Problems zu unterscheiden: I. die algebraisch-analytische Behandlung; II. die geometrische. Letztere zeigt drei Perioden: 1. die Versuche, die verlorene elementare Konstruktion des *Apollonius* wieder herzustellen, welche in *Vieta*'s *Apollonius Gallus* gipfeln, dessen Lösungen, obwohl sie nicht die des *Apollonius* sind, wir noch heute in den Schulen benutzen, cf. die Aufgabensammlung von *Gandtner* und *Junghans*. Die Versuche finden ihre Zusammenfassung in *J. W. von Camerer*'s historisch-kritisch-konstruktiven Werke: *Apollonii* de tactionibus etc. Gotha (1795). 2. Die Anwendung der auf *Monge* zurückgehenden neueren Geometrie, die sich allmählich zur Theorie der Kreis- und Kugel-Büschel etc. auswächst (*Hachette*, *Gaultier*, *Reye*, *Lie*). 3. Die Inversion seit *Plücker* (1834) (*Plücker*, *Möbius*, *Hart*, *Casey*, *Reye*). Alle drei Methoden kommen im Grunde darauf hinaus, im Gegensatz zur analytischen Methode das allgemeine Problem auf spezielle Fälle zurückzuführen, und machen Gebrauch vom Schlußsatz Euklid III, dem Potenzsatz und den Eigenschaften der Radikalachse (Ra, Potenzlinie *Steiner*'s), des Radikalzentrums (R) und der Ähnlichkeitspunkte (inverse Punktepaare, Potenzkreis) und Ähnlichkeitsachsen. Wir unterscheiden *a*, das *Apollonis*che Problem (A), 3 Kreise der Ebene durch 4 zu berühren, das entsprechende Problem für 4 Kugeln von *Fermat*, das erweiterte (A) von *Poncelet* und *Steiner* (Kreis der 3 Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet) und das diesem entsprechende — für 4 Kugeln von *Steiner*.

Historisches:

J. W. von Camerer, *Apollonii* de tactionibus etc. ac maxime Lemmata Pappi cum Vietae libro Apoll. restit. (bei *Camerer, innerer Ähnlichkeitspunkt*).

J. Th. Ahrens, *Apolloni*sches Problem, Programm Augsburg (1832) (*Camerer*).

Th. Reye, *Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme* (1890) (Vorwort).

E. Schilke, Programm Hagenau Nr. 420 (1880), die Lösungen und Erweiterungen des *Apollonius* (sehr brauchbar für die Schule).

Aug. Poulain, 3. Congrès scientifique international des Catholiques, s. Mathesis 15 (1895). Suppl.

In für die Schule bestimmten Lehrbüchern hat das Taktionsproblem wohl zuerst in Frankreich Aufnahme gefunden, z. B. *Bobillier*, *La Frémoire* (*Catalan*), *Rouché* et *Comberousse*, dann in England, z. B. *R. Townsend*, chapters of modern geometry (1863), *J. Casey*, A sequel to Euclid; in Deutschland. Zuerst in Aufgabensammlungen *C. F. A. Jacobi* (*van Swinden* 1834), *Holleben - Gerwien*, dann in Lehrbüchern, *Gallenkamp*, *Milinowski*, *Henrici - Treutlein* und ganz neuestens *W. Pflieger*, Sammlung *Schubert*.

Zunächst kurz I:

Newton, Arithmetica universalis 1, probl. 43—47. ***Euler, Fuß, Camerer*** (algebraisch), *Cartesius* (koordinatengeometrisch), *Carnot*, Géométrie de position 1803 und in einem eigenen Mémoire, aber ohne wirkliche Auflösung; dazu ***Gauß***, Note zu *Schumachers* Übersetzung von 1810, der die Rechnung ebenso vereinfacht wie seiner Zeit *Newton* die geometrischen Konstruktionen des ***Romanus*** (Hyperbeln) in den Principia Lemma 16, vielleicht die einfachste Konstruktion des *Apollon.* Problems.

Das *Fermat*sche Problem der Berührungskugel von vier gegebenen, das von *Fermat* auf plane Konstruktion zurückgeführt ist, französisch übersetzt von *J. N. P. Hachette*, Journal de l'école polytechnique, cah. 7 und 8 (1806) ist rechnerisch zuerst gelöst von *S. D. Poisson,* Traité de la société philomatique (3) 6 (1812) p. 141, aber schon 1808 von *P.* mitgeteilt; *Français*, Correspondance sur l'école polytechn. 2 (1810) Jan. p. 63; geometrische Konstruktion, auf Grund der Rechnung, vervollständigt. Annales etc. de *Nismes*, *J. D. Gergonne* 3 p. 158—61 auf Grund der Formeln für die gegenseitige Entfernung von 4 Punkten der Ebene und 5 Punkten im Raume von *Lagrange* und *Carnot*; vgl. auch Correspondance polytechn. (*Hachette*) 2. — *J. Binet,* école polytechn. cah. 17 (1815) p. 113. Er führt als Daten die Entfernungen der Zentren und die Radien der gegebenen Kugeln oder Kreise ein und als Unbekannte den Radius ϱ und gelangt mittels der zitierten Formeln von *Lagrange* und *Carnot* durch die *Taylor*sche Reihe leicht zum Ausdruck von ϱ für das *Apollon*ische und *Fermat*sche Problem. Er bemerkt, daß die 8 bezw. 16 Radien stets reell gleichgültig, ob die Berührungskreise selbst reell oder imaginär sind. Analytische Geometrie führt dann ***J. D. Gergonne*** zu seiner berühmten Konstruktion, erst kurz in der Turiner Akademie 2. Mai 1814, gedruckt (1816) p. 20 zweiter Zählung (am Schluß Erweiterung auf Ellipse bezw. homothetische Ellipsoide), und dann in wunderbarer Klarheit: *Gergonne* 7 (1817) Recherche du cercle etc. Der Grundgedanke ist seitdem immer wieder angewandt: Statt eines Punktes die Ortskurven, deren Schnitt der Punkt ist, zu betrachten. Vorher hat er *Gerg.* 4 (1813) p. 349 ebenso den Kreis auf der Kugel konstruiert, der 3 Kreise auf der Kugel berührt.

Sehr elegant ist auch die analyt.-geometr. Lösung *Plückers* in den „Entwicklungen" von 1825 und ders. *Gergonne* 18 (1827) p. 29.

Übrigens ist für das *Apollon.* Problem der Radius schon von *Carnot*, Corrélation Nr. 158 (1801) durch quadratische Gleichungen einfach bestimmt und Nr. 159 schon der Berührungspunkt als Ähnlichkeitspunkt erkannt.

II:

J. N. P. Hachette, Mémoire sur le contact des sphères, résumé der Vorlesungen an der École polytechn. correspond. 1, Fructidor 1804 p. 17. Er behandelt 7 Probleme; Nr. 3 und 4 Kugeln von variablem Radius, welche beständig 3 feste Kugeln berühren. Ort der Berührungspunkte auf jeder festen Kugel ein Kreis, Ort der Zentren Kegelschnitt (Hyperbel), die Ebenen stehen auf der Ähnlichkeitsachse senkrecht. Beide Sätze rühren nach der von *Hachette* nicht widersprochenen Angabe *Dupin*'s von *Dupuis* her (Nr. 5 *Dupin*sche Zyklide); Nr. 6 Kreis, der 3 Kreise berührt, die Konstruktion ist an räumliche Betrachtungen gebunden; Nr. 7 *Fermat*sches Problem. Schnitt der Ortskurven für ABC und ABD. *Hachette* nimmt versehentlich 32 Berührungskugeln an; hervorzuheben ist, daß

Hach. schon vor *Gaultier, Poncelet* und *Steiner* die Eigenschaft der inversen Punktepaare benutzt. *Hach.* hat die beiden Sätze sub 3 und 4 in cah. 17 analytisch bewiesen. Er hat dann das Taktionsproblem in seinen Suppléments de la géométrie descriptive de *Monge* behandelt und Correspondance 2. Juli 1812 p. 337 die beiden Tafeln erklärt (hier 16 Kugeln).

Ch. Dupin, Mémoire sur la sphère tangente à trois ou quatre autres, Pisa Okt. (1872), schon aus *1804* (Correspond. 2 p. 420); er löst auch das allgemeine Problem: Ebene Kurve auf einer F^2, Tangente an 3 gegebene C^2 auf der F^2. Satz: Die 3 Tangenten an die 3 Berührungspunkte auf den 3 festen Kugeln schneiden sich in *einem* Punkte, und der Ort dieser Punkte ist eine Gerade senkrecht auf der Ebene der 3 festen Zentra, und in der Ebene der Ortskurven der Zentren der beweglichen Kugel, und ähnliche Sätze.

Chasles führt projektiv das allgemeine Problem auf der F^2 auf das für die Kugel zurück: Correspond. 3 (1814) p. 16, auf der Kugel von *Hachette* ibid. 22. Mai 1813 synthetisch behandelt.

Für die Methode von II, 1 ist die ganz elementare Lösung *Cauchy*'s als Schüler der École polytechn. Correspond. 1 p. 193 hervorzuheben; sie führt das Apollonische Problem auf 2 Kreise und einen Punkt zurück und diese Aufgabe auf die Konstruktion der gemeinsamen Tangente an 2 Kreise, sie wird von *Mention,* Nouvell. annal. 9 benutzt, und desgl. *Poncelet*, ibid. 2, Jan. 1811 p. 271 (Büschelsatz).

Für die Methode von II, 2 ist die grundlegende Arbeit: ***L. Gaultier*** (de Tours) cah. 16 du journal de l'école polytechn. 13. Juni 1812 p. 124—214: Sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions et une sphère déterm. par quatre condit. Noch heute für Mittelschulen sehr brauchbar, hier Radikalachse und -ebene zweier Kreise oder dreier Kugeln, Potenzkreis, Radikalzentrum (Potenzpunkt), Potenzkreis, Kreisschar, Kugelbüschel, Konstruktion für Ebene und Raum.

An *Gergonne* schließt sich *J. B. Durrande* an; *Gerg.* 5 und 6, besonders wichtig aber *Gerg.* 11 p. 68 (Kreise, Kugeln, Zylinder, Kegel etc.), (*Pol und Polare*, Radikalachse und -ebene, *Gergonne*'s Lösung), noch vereinfacht: *Gerg.* 13, p. 193 *Abonné*, vielleicht *E. Bobillier,* dessen Vereinfachung der *Gergonne*schen Lösung in die französischen Lehrbücher und Ausgabensammlungen aus seiner Geometrie 1832 Eingang gefunden hat, z. B. *La Frémoire* und *Catalan.*

J. V. Poncelet, *Gerg.* 11 p. 317, *Apolloni*sches und *Steiner*sches Problem (gemeinsame Sehne der Kreise im Unendlichen) schon im Mémoire présenté par Cauchy à l'Institut und Traité des propriétés projectives (1822) p. 38 dort Schar; Lehre von den Ähnlichkeitspunkten erweitert (inverse *Punktepaare*); das Taktionsproblem mit der *Monge-Servois*schen Lehre von Pol und Polare verbunden, Fläche zweiten Grades (F^2). *Poncelet* hat das *Apoll.* und *Fermat*sche Problem schon Correspond. 2 p. 277 elementar behandelt und sehr ausführlich und ganz elementar zu *Saratoff* (1813), abgedruckt in der 2. Aufl. des Traité von 1862.

G. W. A. Vieth, Dessau (1820), Leitfaden zur vollständigen Wiederherstellung etc. (*Vieta*).

W. L. Christmann, Apollonius Suevus, Tübingen (1821).

J. B. Durrande, Gergonne 16 (1825) p. 112. Zwei orthogonale Kreise O und C, die Polare von P auf O in bezug auf C geht durch den diametralen von P_1, Kugeln dito (Satz von *Monge*). Der Orthogonalkreis dreier Kreise oder die Orthogonal-Kugel von 4 Kugeln ist der Ort der Punkte P, deren Polaren sich in *einem*

Punkte S schneiden, und ist zugleich Ort von S, und die zusammengehörigen Schnittpunkte sind diametral; ebendort p. 378 *Sarrus* unmittelbar durch Hineingehen in den Raum die Existenz der Radikalachse für Kreis und Kugel.

Heegmann, (1826) Société de Lille, 3 kleine Kreise auf der Kugel, A etc.

Jakob Steiner, Crelle 1 (1826) p. 161 „Einige geometrische Betrachtungen", Entwicklung der Lehre von der Potenz wie den Ähnlichkeitspunkten und -Achsen (*Monge*), ganz elementar; vieles schon bei *Gaultier*, der *nicht* erwähnt wird, so z. B. der *Potenzkreis* (französisch reproduziert: *Gergonne* 17 p. 285).

Zu *Crelle* 2 (1827) p. 190, Taktionsproblem auf der Kugel, vgl. *Ch. Gudermann* 8 (1832) p. 160.

Colecchi, Sui problemi delle tazioni, Napoli 1836; Versuch, den Gang des *Apollonius* herzustellen.

Satz von *J. L. Raabe, Crelle* 2 (1827) p. 395.

J. Plücker, Mémoire sur les contacts et sur les intersections des cercles, *Gergonne* 18 (1827) p. 29 (analytische Geometrie).

Vallès, Gerg. 19 (1829) p. 262. Zwei Kreise berühren einen Winkel 4α und sich von außen, so ist: $r/r' = \cot^2(45 - \alpha)$.

Abonné, Gerg. 19 p. 175; dito *Gerg.* 20 p. 84—88, Kugel, die auf 4 gegebenen Ebenen Kreise von gegebenen Radien ausschneidet, Kegel so, daß die 4 umgeschriebenen Kegel, welche ihre Spitzen in 4 gegebenen Punkten haben, gegebene Öffnungswinkel haben.

J. Th. Ahrens, Apollonius (1832), Literatur bis 1820; *Gerg.* nicht erwähnt, die Lösung ist die von *Camerer.*

Jakob Steiner (1833). Die geometr. Konstruktionen etc., besonders Lehre von der Doppelverwandtschaft der Ähnlichkeitspunkte (siehe Inversion).

J. Plücker, Crelle 11 (1834) p. 219; vgl. Inversion. *Erstmalige Anwendung der Inversion auf Taktion.*

C. F. Arndt, Grunert 5 p. 113, Kreisschar, Kugelschar; ganz elementarer Beweis der Sätze bei *Steiner*: *Crelle* 1. *Arndt* beweist mit der Lehre von der Kreispotenz die Sätze über das Schneiden der 3 Höhen, der 3 Medianen und der 3 Winkelhalbierenden etc., Pol und Polare, harmonische Teilung, die Arbeit noch heute für Mittelschulen sehr brauchbar.

C. Th. Anger, (1839) Danzig, Betrachtungen etc.; ders. (1841) Danzig.

P. Magrini, Sui contatti dei circoli (1841) Venedig (zu beachtender Mathematiker).

Aug. Miquel, *Liouville* 9 (1844) p. 20, 1. Mémoire: Wenn sich 4 Kreise sukzessive paarweise auf *einem* Kreise schneiden, so liegen auch die 4 symmetrischen Schnittpunkte auf *einem* Kreise. *Liouv.* 10 p. 341. 2. Mémoire: 6 Kugeln, drei und drei etc., auch die 6 symmetrisch auf einer Kugel. *Liouv.* 11 p. 65, Kreisschar, Taktion von Kreis und Kugel, *Steiner*sches Problem, *St.* Problem für Kugeln, stereographische Projektion.

W. Rutherford, The mathematician (1846), noch vor *Arndt* das System der 8 Kreise über den Seiten eines Dreiecks; die Radien der 8 Berührungskreise äußerst einfach durch die 4 Seitenergänzungen $p, p - a, \cdots$ und die $4r$.; vgl. dazu *Déprez*, Mathesis (2) 11 (1901) p. 118; (1902) p. 64.

Arcas Trébert, Nouv. annal. 3 (1844) p. 101, geschickte Rechnung für *Fermat*sches Problem; *Gergonne*'s Lösung auf die Kugeln übertragen.

J. A. Serret, Crelle 37 (1848) p. 51, *Fermat*sches Problem, Konstruktion sehr einfach.

J. Mention, Nouv. annal. 11 p. 103; *Bodenmiller*scher (nicht *Faure*) Satz (s. Vierseit) 1852; ibid. *Garnier*, hübscher Satz über Ähnlichkeitspunkte p. 348; ibid. p. 398 *Jullien*, Büschelsatz von *Plücker*.

M. Chasles, Géométrie supérieure (1852, 2. Aufl. 1880), Kreisschar sehr ausführlich.

A. Möbius, Longimetrie, imaginäre Kreise (1852), Werke Bd. 2, p. 189.

Burnley, On bisectant axes etc. (1852), London.

A. Mannheim, s. unten *Serret*. Ort der Zentren der Kreise, welche 3 gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, sind 4 Gerade durch Radikalzentrum.

F. Kerz (hessischer Rittmeister, später Oberst), *Grun*. 24 (1853) p. 271, Fall, in dem die 3 Zentren auf *einer* Geraden (wo *Gerg*. versagt); *Grun*. 26 p. 266, spezielle Fälle; *Grun*. 28 (2 Kreise berührt, der 3. rechtwinklig schneidet etc.); *Grun*. 35 (1860) p. 121. *Kerz* ist breit, aber elementar.

Taktion auf der Kugel (Inversion, bezw. stereographische Projektion) *Vannson*, Nouvelles annales 14 (1855).

J. J. Wilkinson, Kreis der Tangentenverhältnisse, 8 Seiten (1855), Nouv. annal. 14 (1858) p. 169.

B. Alvord, Smithsonian contributions 8 (1855); ders. American Journal of Mathematics (Johns Hopkins University) 5 (1882) p. 25.

J. C. L. Hellwig, Das *Apollon*ische Problem, Halle (1856).

Devaux, Oxamendi, Nouv. annal. 15 (1856) p. 226; Sur l'aire du $\triangle$ formé par les tangentes communes.

A. Bauer, *Schlömilch* 13 (1860) p. 160, Anwendung der Determinanten auf Taktion.

A. Kurz, *Grun*. 37 p. 346, sehr kurze und klare Übersicht über das Taktionsproblem auf 3 Seiten.

Coaklay, The mathematician monthly (*Runcle*) (1860) p. 116, analytisch, *Apollonius*, auch *Fermat*.

A. Hart, Quarterly journal 4 (1861) s. *Feuerbach*.

John Casey, Quarterly journ. 5 (1862) p. 43, p. 118, On coaxial circles (*Poncelet*scher Schließungssatz); Triangular systems of circles, p. 318. Eigenschaften der 8 Berührungskreise (Grenzpunkte); *Gruppen* zu 4, die außer den 3 gegebenen noch von einem 4. berührt werden; Benutzung der Inversion. *Cayley* ibid. p. 381 (abgeleitet aus der Gleichung zwischen den 6 Distanzen von 4 Punkten).

R. Townsend, Modern geometry 1 (1863) p. 235; A, B, C Zentren; AR etc. Radien, Bedingung für Koaxialität; $AR^2 : AB\,AC +$ etc. $= 1$.

P. Serret, Nouv. annal. 22 (1863) p. 95, Sur le cercle tangent à trois; 4 Scharen isogonaler Kreise, jede hat eine der 4 Ähnlichkeitsachsen zur gemeinsamen Radikalachse, das Hauptresultat schon Nouv. annal. 12 (1853) p. 113 von *Mannheim*.

E. Barbier, Zurückführung auf *Gassendi*sches Problem. Nouv. annal. (2) 4 (1865) p. 313; im selben Bande: *E. Mathieu*, Taktion mit Dreieckskoordinaten.

J. Casey, Proceedings of the Royal Irish society (1866) 9. April, sehr elegante Gleichung für Kreis der 3 Kreise: $U = 0$; $V = 0$; $W = 0$; berührt: $\sqrt{f}\,U + \sqrt{g}\,V + \sqrt{h}\,W = 0$; darüber *Cayley*, Quarterly journ. 8 p. 334.

E. Stephan, Nouv. annal. (2) 5 (1866) p. 321, Konstruktion der Zentren der Kreise des *Apollon*ischen Problems.

Ch. W. Merrifield, Proceedings of the London mathem. society 2 (1869) p. 175 zeigt, daß die Radikalachse schon den *Arabern* bekannt gewesen.

J. Eilles, Das *Apollon*ische Problem, Programm Straubing (1869).

A. Aubanel, Nouv. annal. (2) 9 p. 326, *Radikalkreis* (entgegengesetzt gleiche Potenz $p = -p'$), Satz von *Faure* über p, p. 371 *Steiner*sches Problem.

G. Affolter, Clebsch Annalen 4 (1871) p. 185, Kugel, welche 4 Kugeln unter gleichem Winkel schneidet (16; eine, welche alle 4 gleichartig); id. *Schlömilch* 16 p. 162, *Steiner*sche Kugeln, sehr *kurz*; id. *Grunert* 57 (1874) p. 1—62: Zur Geometrie des Kreises und der Kugeln, sehr elementar und *sehr für die Schule geeignet*.

S. Lie, Clebsch 5 (1872) S. 173: Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe. Der Komplex der Kugeln, die eine feste Kugel unter gegebenem Winkel schneiden, erscheint als Transformation des allgemeinen *Plücker*schen Komplexes. Dadurch, daß bei *Lie* der Radius auch in der ersten Potenz auftritt, ist *Lie* allgemeiner als *Reye* (s. unten), und es tritt neben Inversion auch Paralleltransformation (Dilatation) auf. Die *Lie*sche Arbeit ist zwar an sich keineswegs elem., enthält aber (Hinweisung von *F. Klein*) einen bedeutenden elem. Kern.

J. Griffiths, London mathem. soc. Proceed. 3 (1871) p. 269, Proc. 5, p. 33 (analytisch), *Steiner*sches Problem. id. Quarterly J, 11 (1871) p. 366.

H. Schubert, Schlömilch 14 (1869) p. 506. Eine geometrische Eigenschaft der 16 Kugeln, welche 4 etc. berühren; metrische Relationen zwischen den Radien der 16.

J. G. Darboux, Annales scientifiques de l'école normale (2) 1 (1872) p. 323, *Steiner*sches Problem.

F. X. Stoll, Clebsch Annalen 6 (1873) p. 613; Analyse der verschiedenen Fälle, sehr genaue Unterscheidung: ders. Programm (1874, 1875).

P. Mansion, Nouv. Correspond. (*Catalan*) 1 (1874). Gegeben Figur f und Punkt A und C; Figur $F \sim f$ etc.; Kreis, der Kreis berührt und durch A und C geht, mittels Ähnlichkeit. Ibid. 1 und 2 *Laisant*; Ort der Punkte, deren Potenzsumme für n gegebene Kreise konstant, ist ein Kreis. Ibid. 3 (1876) *E. Dubois:* Die 8 Kreise in 4 Gruppen 1. $a = +++$; $a' ---$ [$+$ außen, $-$ innen]; 2. $\alpha = +--$; $\alpha' = -++$; 3. $\beta = -+-$; β'; 4. $\gamma = --+$; γ'; I g und g^1 und orthogonaler Kreis R der 3 gegebenen ABC haben dieselbe Radikalachse; II. Jede Sekante durch Punkt R schneidet die 8 Kreise in 16 Punkten einer Involution, deren Zentrum R ist; III. 4 Kreise zweier Gruppen schneiden sich in 12 Punkten, von denen 4 auf Kreis R liegen, die anderen paarweise mit R in gerader Linie; IV. Die 4 Kreise von 2 Gruppen sind Tangenten an *einen* Kreis (*Casey 1862*); V. Diese 6 Kreise haben R zum orthogonalen Kreis (vgl. aber *Casey* (1862) und *Hart* (1861)).

O. Lampe, Programm Ohlau (1876), Das Taktionsproblem.

O. Broeckerhoff, Programm Beuthen (1870), *Apollon*isches Problem.

v. Lühmann, Konstruktionen etc. Programm Gartz (1877).

A. Morel, Bourget (1878) p. 257; orthogonaler Kreis als Ort der Punkte etc. (Satz von *Durrande!*), Begriff des Kreisabstandsverhältnisses, Kreisschar, danach Inversion.

L. Mack, Grunert 62 (1878) p. 405, Radikalachse, Kreis entgegengesetzt gleichen Potenzen (Radikalkreis).

J. Petersen, Methoden und Theorien (1879) p. 101.

Frz. Mertens, Analytische Auflösung des *Apollon*ischen Probl., sehr elegante Rechnung. *Schlömilch* 21 (1874) p. 443.

Ed. Lucas, Messenger 8 (1879) p. 38. Die Potenzen eines Punktes für

5 Kreise oder 6 Kugeln sind durch eine lineare homogene Gleichung verbunden, in der die Summe der Koeffizienten 0 ist.

Th. Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln analytisch auch in *Salmon,* Conic Sections und vielen anderen Werken (1879), Inversion, ebenso vollständig wie elementar; die Geometrie des linearen Kreis- bezw. Kugelkomplexes (analytisch *M. Simon*, Sammlung *Schubert* 8 und 9); ***nirgends ist das Taktionsproblem so übersichtlich im Zusammenhange dargestellt*** wie bei *Reye.*

E. Lemoine, Bourget (1879); 2 Punkte und 1 Gerade ganz elementar, sogar ohne Ähnlichkeit; Konstruktion läßt sich noch vereinfachen, so daß sie beide Kreise gibt.

E. Laquière, Association française (1880) führt einfach das *Steiner*sche Problem auf das *Apollonis*che und das *Steiner*sche Problem für die Kugel auf das *Fermat*sche zurück.

K. E. Hoffmann, Grunert 66 p. 246; Taktionsproblem angewandt auf die 3 Ankreise eines Dreiecks.

J. Casey, A sequel to *Euclid* (1881) p. 122. *Gergonne*sche Lösung gilt nur für 3 Punkte oder 3 Gerade nicht; eigene Lösung, im Grunde die von *Newton,* aber selbständig gefunden.

W. Fiedler, Zyklographie (1882); dem Punkt im Raume wird in der Bildebene ein bestimmter Kreis zugeordnet, so einfach im Grunde die Lösung des Taktionsproblems ist, so gehört das Werk doch in die *darstellende Geometrie.*

G. F. Walker, Messenger (2) 12 (1882) (2 Lösungen). Wenn eine Kugel 3 berührt, so besteht der Ort der Zentren aus 8 Kegelschnitten und der Ort der Berührungspunkte mit einer der 4 gegebenen Kugeln aus 4 kleinen Kreise; die Ebenen aller 12 Kreise schneiden sich in der Radikalachse, *Dupuis-Hachette!*

A. Milinowski, Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. 1. Abschnitt Leipzig (1882). (2. wohlfeile Ausgabe 1896.)

E. Laquière, Nouv. annal. (3) 2 (1883); Détermination et construction nouvelle du cercle etc. (*Steiner*sches Problem, *Steiner*sches Kugelproblem); *sehr einfache* Konstruktion der 8 Kreise, und 16 Kugeln. Gleichung (nicht elementar) der 8 Kreise und 16 Kugeln; p. 348 wesentliche Vereinfachung; Nouv. annal. (3) 5 (1885) kurz die Lösung *Gergonne*'s durch Inversion.

J. Thomae, Schlömilch Zeitschr. 29 (1884) p. 284: Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum (Inversion). *Hoßfeld,* ebenda p. 305, 8 Kreise, welche 4 Kreise unter einerlei Winkel schneiden, bilden in Gemeinschaft mit den 4 orthogonalen Kreisen zu je 3 der 4 eine Konfiguration $12_6\ 16_3$.

M. Jenkins, Educat. tim. 39 (1883) p. 88 Nr. 7185; *Feuerbach*scher Kreis als besonderer Fall der Taktion; das Zentrum des *Feuerbach* ist der Punkt, in dem sich die 3 Kreise schneiden, welche 2 Ankreise + und einen — berühren.

E. Wiskoczil, Das *Apollonis*che Problem, Programm Iglau 1887.

A. Schiappa Monteiro, Teixeira journal 5 (1884), Recherche etc.; der Ort des Zentrums des Kreises, der 2 Kreise unter gegebenem Winkel schneidet. Große Anzahl wichtiger Sätze in betreff des Systems von Kreisen und der dadurch bestimmten Kugeln.

R. Lachlan, Quarterly journal 21 (1885) p. 1—59; *Steiner*sches Problem, Inversion; es gibt zwei Kreise, die invers in bezug auf den orthogonalen Kreis (On the properties of an angle formed by coplanar circles); id. *Messenger* 16 (1887) p. 152. On poristie systems of circles.

A. Cayley, Messenger 17 (1887) p. 18; System of equations for three circles which cut each other at given angles (*Steiner*sches Problem).

B. Niewenglonski, Anwendung des *Stewart*schen Satzes $OA^2 \cdot BC + \cdots + AB \cdot BC \cdot CA = 0$ auf den Spezialfall des *Apollon*ischen Problems: 2 Punkte und 1 Kreis Nouv. Ann. (3) 6 (1887 p. 173—175).

L. Gianni, Periodico matem. 4 (1889) p. 8 u. 45; elementarer Beweis der wichtigsten Eigenschaften einer Kreisschar.

E. Vigarié, Mathesis 9 (1889) p. 106, Kreisschar, Ähnlichkeitspunkte.

A. Cayley, Quarterly journal 25 (1891) p. 124; Reproduktion der Lösungen des *Apollon*ischen Problems von *Newton* und *Casey*; analytische Berechnung des Quadrats der Entfernungen der Zentren.

V. Hioux, Nouv. annal. (3) 10 (1891) p. 399, Inversion (*Gergonne* bewiesen). *Maurice Fouché,* ibid. 11 p. 227, 331 u. 404 gestützt auf die Isogonalkreise.

H. Cranz, Das *Apollon*ische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben (*Malfatti*) Stuttgart 1891, gutes elementares Sammelwerk.

Hor. Cox, Quarterly journ. 25 (1891) p. 1 Application of *Graßmann*'s Ausdehnungslehre to properties of circles.

R. Lachlan, Quart. journ. 26 (1892) p. 129; On coaxal systems of circles.

*A. Larmor, Casey*sche Bedingung (s. Inversion) auf das *Apoll.* Problem angewandt.; Lond. math. soc. Proc. 23 (1892) p. 135.

Ad. Breuer, Die einfachste Lösung des *Apollon*ischen Problems; eine Anwendung der neuen Theorie der Imaginären. Erfurt 1892.

A. Poulain, 3. Congrès scientifique international des Catholiques; elementar, *Steiner*sches Problem, Literatur (s. Mathesis 15).

A. Droz-Farny, Bourget (1895) p. 242 hebt hervor, daß die meisten Sätze über die Radikalachse in *Chasles*' géométrie supérieure aus dem Satz von *Casey* (A sequel to *Euclid* 6 p. 113) folgen: Die Differenz der Quadrate der Tangenten von einem Punkt an zwei Kreise ist gleich dem Rechteck aus den Abständen von der Radikalachse und der Zentrale. *Chassiotis,* ibid. p. 218, p. 267; Kreis, der einem Dreieck konjugiert ist, ist der orthogonale Kreis der 3 Kreise über den Seiten (Zentrum H). Sind $\Delta_1, \cdots, \Delta_4$ 4 Gerade und Γ_1 konjugiert zu $\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$, so sind Γ_1 bis Γ_4 orthogonal zu den 3 Kreisen D_1 D_2 D_3 über den 3 Diagonalen des Vierseits; ibid. p. 225, Satz von *de Longchamps.*

R. Lachlan, On systems of circles and spheres. Proc. Roy. Soc. 40 p. 242 und Phil. Trans. 177 (1886) p. 481—625.

Zum Radikalkreis von *Duran-Loriga* vergl. *L. Mack* (1878) in *Grunert* 62 (s. oben.)

J. Duran-Loriga, Il progreso matem. 5 (1895) p. 70; Radikalkreis ($p = -p'$) $\cdot\, 4\varrho^2 = 2(R^2 + R'^2) - d^2$; *Bourget* (1896); Mathesis 16 p. 105; vgl. *G. de Longchamps,* Journal de mathématiques spéciales (1886) p. 371. *Duran-Loriga* (1897), *Bourget,* Beweis, daß der Kreis von *Longchamps* die Potentialkreise (um die Mitte der Seiten mit den Medianen) orthogonal schneidet p. 29, p. 60 (cercle radical, d. h. der mit einem gegebenem Kreis einen gegebenen zum Radikalkreis hat) p. 82; Anwendung auf die Dreiecksgeometrie; id. *Rivistadi Peano* 6 (1895) p. 173, Sobre los circolos radicales; id. *Grunert* (2) 15 (1896) p. 17; Mathesis (2) 6 (1896) p. 105; *Teixeira* J. 13 (1896) p. 33 usw.

R. F. Muirhead, Edinburgh mathemat. society Proceedings 14 (1896) p. 135: On the number and nature of the solutions of the *Apollonian* contact problem. Ein sehr einfaches Verfahren zur Lösung; Klassifikation der Fälle des *Apollonius.*

K. Traub, Berechnung der Radien, Lahr 1896.

W. Bartolomei, Versuch einer elementar-theoretischen Untersuchung der Berührung von Kugeln, russisch 1895.

J. Sobotka, Wiener Monatshefte 7 (1896) p. 347, Kreise gleicher Tangentenlänge.

W. McF. Orr, Cambridge Proceedings (1897); Theory on the contact of spheres, 9 Sätze sind nicht neu, aber sehr einfach bewiesen.

E. Study, Sitzber. der Ges. für Naturk. in Bonn 1 p. 8, *Clebsch* Annalen 49 (1897) p. 497—542; das *Apollon*ische Problem, Invarianten- und Gruppentheorie, geometrisch durch Inversion.

A. Henschel, Progr. 721 (1899) Weimar, Untersuchung über Berührungskugeln.

E. Rouché, Traité, *Apollon*isches Problem nach *Fouché* und *Steiner*sches Problem nach *Tarry* (1900).

J. Gallucci, Nouv. annal. (1900) p. 115. *Duporcq* p. 193 (concours de 1899); *A. Maßfeller*, Progr. Montabaur (1901), Arch. der Math. u. Phys. (3) 3. (1902) p. 189. Eine einfache Lösung des *Apollon.* Problems (beliebiger Hilfskreis statt des *Gergonne*schen Orthogonalkreises); vgl. auch *Feuerbach, Malfatti*, *Inversion*, Kreis.

12. Schließungsproblem (inkl. Castillon). a) Castillon. Zeichen für *Castillon*sches *Problem* für Kegelschnitte C_2.

Zeichen für *Ottojano*sches *Problem* für Kegelschnitte O_2.

Das *Castillon*sche Problem ist die Aufgabe, ein Dreieck (dual. Dreiseit) zu konstruieren, dessen Seiten (Ecken) durch feste Punkte (auf festen Geraden) gehen und das einem gegebenen Kreise ein- (um-) geschrieben ist.

Das *Ottojano*sche Problem ist die Verallgemeinerung des *Castillon*schen auf beliebiges n-Eck (-Seit).

Die Polarentheorie und projektive Geometrie ersetzen den Kreis durch einen beliebigen Kegelschnitt, und so ergeben sich das C_2 und O_2. Im speziellen Fall, wo die 3 Punkte auf einer Geraden liegen, ist C_2 von *Pappus,* Collectaneen Buch 7, Problem 117 gelöst durch Zurückführung (Problem 107) auf den Fall, wo ein Punkt im Unendlichen (wie im *Catalan*'s Théorèmes et problèmes). *G. F. Castillon,* der sich seit 1742 infolge einer Aufforderung *Cramer*'s mit dem *Cast.* Probl. beschäftigte, veröffentlichte seine elementargeometrische Lösung in den Mémoires de Berlin (1776) p. 265, wo dann *Lagrange* p. 284 sofort die Lösung durch Rechnung gab. *Euler* übertrug das Problem auf die Kugel, nachdem er es, gestützt auf eine hübsche Erweiterung des Potenzsatzes, ganz elementar bewiesen, Acta Petropol. (1780) p. 91; ebendort *Fuß* p. 97 erst Fall *Pappus* und dann das *Castillon*sche, ebenfalls elementar, und *Lexell* gab für die *Lagrange*sche Lösung die Konstruktion und leitete auch die *Castillon*sche ab.

Anknüpfend an *Pappus* gab *Ottojano,* damals wenig über 16 Jahre,

in den Memorie di fisica e di matematica della societè italiana, *Modena* (nicht Verona) seine Lösung des *Ottojano*schen Problems. Im selben Bande unabhängig von ihm *Malfatti* die seinige, er nennt die von *Ottojano*, „una soluzione breve e ingegnosa", und *L'Huilier*, der eine eigene analytische Lösung des *Ottojano*schen Problems im eigenen Mémoire vom 23. April 1795 gegeben, druckte in den Éléments d'analyse géométrique etc. 1809 die Lösungen von *Ottojano* und *Malfatti* ab. *Carnot*, Géométrie de position 1803 p. 383 analytisch (*Lagrange*) nicht durchgeführt, aber die Geschichte.

Literatur ferner bei *Terquem*, Nouv. annal. 3 und

Max Brückner, Das *Ottojano*sche Problem, Programm Zwickau 1892, wo die wichtigsten Lösungen reproduziert sind, und *Poncelet*, Traité (1822) § 557 und § 5; einiges auch bei *Chasles*, Aperçu, Note 11.

Ch. J. Brianchon gibt Journal de l'école polytechn. (1810) cah. 10, J. 4 das *Ottoj.* Problem und O_2 mittels eines allgemeinen Satzes, der zu den sogenannten *Poncelet*schen Schließungssätzen gehört, hier kommt das Wort pôle vor, aber nicht in der heutigen Bedeutung.

J. D. Gergonne stellt Annales 1 (1810) p. 17 das duale *Castill.* Problem zur Frage, in der Note gleich das *Ottoj.* Problem, worauf *Encontre* p. 122 mit Pol und Polare (die nicht genannt werden) das *Ottoj.* Problem löst und gleich bemerkt, daß damit auch O_2 gelöst ist. *Gergonne* gibt dann p. 126 eine elegante (Lineal-)Konstruktion des dualen *Cast.* Problems und fordert zum Beweis auf. p. 337 (nicht 337 B) gibt dann *Servois* die Lösung des C_2 mit der Polarentheorie (hier zum erstenmal: *Pol*) und *Rochat* p. 342 dieselbe Lösung (mit dem Lineal).

Gergonne gibt dann: *Gerg.* 7 p. 325, um die Überlegenheit seiner analytischen Lineal-) Methode (vgl. Taktionsproblem) über die synthetische zu zeigen, seine Lösung; ihm erwidert *Poncelet Gerg.* 8 p. 146 mit den Reflexions und gibt zwei Lösungen des O_2 (in der ersten, indirekten ein störender Druckfehler), die *zweite* ganz besonders einfach; dann den Spezialfall, den schon *Brianchon* erledigt hatte, in dem die Punkte auf *einer* Geraden liegen, wo *Encontre* und *Servois* versagen; hier auf p. 151 für den Fall geradzahliger Polygone der *erste* Schließungssatz. Er gibt auch den fundamentalen Satz an: Wenn sich ein Polygon in einer Kurve zweiten Grades (einer C^2) so bewegt, daß die Seiten bis auf eine durch feste Punkte gehen, so umhüllt diese Seite eine C'^2, welche die C^2 in zwei Punkten berührt.

Das ist die Hauptarbeit *Poncelet's* über das *Ottoj.* Probl. und nicht der Traité § 557—564, wo sie im wesentlichen reproduziert ist.

Ad. Lechevain, Correspondance *Quetelet* 1 (1825) Question p. 357, Lösung (2) 65 (1826).

Th. Clausen, *Crelle* 4 (1829) p. 391; zwei Dreiecke, ein Kreis, das eine um-, das andere eingeschrieben, so daß die Seiten des inneren durch die Ecken des äußeren gehen; wenn das eine gegeben ist, das andere zu finden. Trigonometrisch, auf beliebiges Polygon verallgemeinert von *Möbius*, *Crelle* 5 (1830) p. 102 mit baryzentrischem Kalkul.

Mittels Lineals und festen Kreises mit gegebenem Mittelpunkt, *Steiner* geometrische Konstruktionen 1833, Anhang, Aufgabe 20 und 21, die beiden Dualen O_2.

Triau, Nouv. annal. 3 (1843) p. 461, elegante, elementare Lösung durch Zurückführung auf Spezialfall von *Pappus* (in *Catalan*'s Théorèmes reproduziert), dazu Note von *Terquem*.

Aubertin, Crelle 45 (1853) p. 246 mit eigentümlichen, nicht unpraktischen Koordinaten das C_2.

A. Cayley, Quarterly journ. 3 (1859) p. 57 reproduziert *Clausen* und *Möbius*.

M. Gardiner, ibi 7 (1866) p. 146, O_2. idem Lond. Math. Soc. Proc. 2 (1868) p. 63.

S. A. Renshaw, London mathem. society proceedings 7 (1876) p. 239, der als sehr einfache Lösung für das *Ottoj.* Probl. im Kreise die von *Swale* von *Liverpool* erwähnt, welche er auf *Castill.* Problem erweitert.

G. Affolter, Programm Solothurn 1870, Beiträge zur Geometrie der Vielecke

F. P. Pourcheiroux, Nouv. annal. (2) 9 (1870) p. 423, Kreis und zwei Punkte gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel je durch einen der Punkte gehen, zurückgeführt auf die Aufgabe: Gegeben Kreis und zwei Gerade, Tangente zu ziehen, welche zwischen den Geraden halbiert wird, welche Aufgabe *A. Morel,* ibid. (2) 8 p. 232 gelöst hat (Hyperbel), und *E. Lemoine;* ibid. (1894) p. 215. *M. Auric,* Billard circulaire.

Poncelet's Lösungen mit Abänderungen: Sammlung *Schubert* 8 (1899) p. 164. Analytische Geometrie der Ebene. (Schnitt einer Geraden und eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes.)

Lösung mit Äquipollenzen von *Béziat,* Nouv. annal. (2) 9 (1870) p. 129 und mit Inversion *Petersen,* Methoden und Theorien, deutsch 1879, Aufgabe 200 und 201.

Educational times 61 (1894) p. 530; zwei Seiten des eingeschriebenen Dreiecks durch feste Punkte und das Dreieck Maximum oder Minimum, *E. Lampe* (Berührungskreise durch P und Q).

Verwandte Aufgaben:

Einem gegebenen Dreieck ein gegebenes Dreieck um- und einzuschreiben; *Gergonne* 2 p. 22—32, *Vecten, Rochat, Fauquier;* dieselben: p. 88—94. Einem Dreieck das größte Dreieck von gegebener Art um-, bezw. das kleinste einzuschreiben. (*L'Huilier,* Éléments 1809.)

J. Steiner, geom. Konstrukt. p. 67. Wenn zwei Dreiecke gegeben sind, ein drittes zu finden, das dem ersten um- und dem zweiten eingeschrieben ist.

G. Tarry, Nouv. annal. (3) 10 (1891) p. 5. In eine gegebene Kugel ein *geradliniges* Polygon einzuschreiben, so daß jede Seite durch einen gegebenen Punkt geht; (3) 11 p. 257 mit Äquipollenz gelöst.

L. Schlegel, Zeuthen Tidsskrift (3) 6 (1876) p. 82, das größte gleichschenklige Dreieck, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen, elementar.

Quadrat in ein Viereck: *Frz. Seydewitz,* trigonometrisch und projektiv: *Grunert* 6 (1845) p. 178; *Clausen,* sehr elegant, elementar, *Grunert* 15 p. 238, cf, *Hauck* bei Trigonometrie; *D. Ch. L. Lehmus, Crelle* 34 p. 280, Konstruktion durch Rechnung: *Crelle* 45 p. 246.

Davis wie *Hauck,* Educational times 60 p. 49 11 979 (1894).

Verallgemeinerungen, wo der Kegelschnitt durch ein Polygon ersetzt ist, besonders bei *Poncelet* in den den zitierten vorangehenden Paragraphen.

*Ottojano*sches Problem auf der Kugel, das schon *Euler* auf planes zurückgeführt hatte, einfacher von *J. B. Durrande, Gergonne* 8 p. 162, das O_2 ist dann von *Poncelet* im Traité projektiv gelöst.

*Castillon*sches Problem im Raum: Sir *W. Hamilton,* Irish academy (1849) (Quaternionen).

R. Townsend, London mathem. society proceed. 2 (1867) p. 21, Geradlinige Flächen zweiten Grades (O_2).

M. Gardiner, Quarterly journ. 7 (1866) p. 284 auf F^2, nachdem er ibid. p. 146 das *Ottojano*sche Problem auf Kegelschnitten behandelt hat, auch *Pascal* (analytisch).

b. Schließungsproblem.

Obgleich schon *Euler* und *Fuß* die Relation für das ein- und umgeschriebene Dreieck und Viereck gegeben haben, so ist doch die eigentliche Reihe der Sätze im Anschluß an das *Castillon*sche Problem von *Poncelet,* Traité § 565 gegeben, den der Spezialfall, in dem die Punkte in gerader Linie und die Seitenzahl gerade, darauf hinführte; der Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen ist bekannt, doch gehört es zum Teil, wenigstens für den Kreis, in die Elementargeometrie.

J. B. Durrande, Gergonne 17 p. 29.

J. Quidde, Grunert 23 p. 130 Kreisbüschel, ganz elementar.

(Stuttgart) *Planck, Grunert* 19 (1852) p. 73, elementar, auf den *Pascal* gestützt, den er 18 p. 335 bewiesen hat.

Schließungsproblem elementar bewiesen von *Casey* und *Hart,* Quarterly journal (1857 und 1858).

W. H. Besant, Quarterly journal 13 (1874) p. 276, Schließungsproblem für Dreieck, ganz kurz.

A. Milinowski, Schlömilch 23 (1878) p. 139; sehr einfache Ableitung der Bedingung fürs Viereck, $\varrho^2 = (r + \varrho + d)(r + \varrho - d) \ldots$ bezw. $\varrho^4 = -J^2$, wo J das Dreieck aus r, ϱ, d.

R. Townsend, Educational Times 27 (1877) p. 71. Bedingung fürs Sechseck: Wenn R großer und r kleiner Radius, so, wenn $\cos^{-1} x = \text{arc} \cos x$ ist,

$$\sin \cos^{-1} \frac{r}{R-h} + \cos \sin^{-1} \frac{r}{R+h} = 1.$$

M. Weill, Sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux cercles. *Liouville* (3) 4 (1878) p. 265—304. 1. Satz: Im Fall einer Schließung ist das Zentrum der mittleren Entfernung der Berührungspunkte ein fester Punkt; der Ort der Schwerpunkte von $n - r$ dieser Punkte ist ein Kreis (*G. N. Halphen,* mit elliptischen Funktionen: *Liouville* (3) 5 (1879) p. 285).

M. Weill, Nouv. annal. (2) 19 (1880) p. 57; 2. Satz: Wenn ein konvexes Polygon sich bewegt, indem es denselben beiden Kreisen ein- und umgeschrieben bleibt, so bleibt seine Fläche proportional der des Polygons, welches zu Ecken die Berührungspunkte mit dem inneren Kreise hat, wovon der *Feuerbach*sche Satz: Das Dreieck ist mittlere Proportionale zwischen dem Dreieck der Zentren der Ankreise und dem der Berührungspunkte, spezieller Fall ist. In der Arbeit

Weill's, *Liouv.* (3) 4 (1878) p. 265 ist das Schließungsproblem im Kreis eigentlich völlig gelöst.

N. Trudi, Rendiconto del reale Accadem. di Napoli. (1882); Sätze *Weill*'s und *Halphen*'s aus *Liouville* 4 und 5 abgeleitet durch elementare Betrachtungen über die *Feuerbach*schen Kreise.

C. Intrigila, Battaglini 21 (1883) p. 323; Sui poligoni iscritti e circoscritti contemporaneamente a due circonferenze.

J. Junker, Geometrische Untersuchungen über bizentrische Vierecke (Tangenten in den Enden zweier senkrechter Sehnen); Programm Krefeld (1892).

H. Verrière, Clairin, Bourget (1893) p. 79; Schließungsproblem unabhängig von der *Euler*schen Relation, ganz elementar fürs Dreieck.

Historisch:

Gino Loria, I poligoni di *Poncelet,* Torino (1889), Zusatz Bibliotheca mathematica (1889).

Hierzu *X. Stoll, Schlömilch* 29 (1884) p. 91, Über sphärische Vielecke, die einem Kreis ein- und einem anderen Kreis umgeschrieben sind, *elementar* (trigonometrisch). Die Sätze, welche *Jacobi* (bezw. *Poncelet*) für die Ebene bewiesen hat, soweit sie auf der Kugel gelten.

Neben dem *Poncelet*schen kommt das von *Steiner* erweiterte Kreisringproblem des *Pappus,* Collectaneen 6, 12—17 in Betracht.

J. Steiner, Crelle 1 p. 252, p. 272; Kreisringreihen; *Gergonne* 19 p. 252, *Vallès,* Kreis- bezw. Kugelreihen.

Paul Serret, Nouv. annal. (2) 1 (1862) p. 184 für Kreise.

H. M. Taylor, Messenger 7 (1878); Ring of circles touching two circles; Inversion aus zwei konzentrischen Kreisen, und *W. W. Taylor,* ibid. p. 167 Verallgemeinerung.

E. B. Seitz, Analist 5 (1878) p. 45, auf der Kugel.

K. Schwering, Schlömilch 24 (1879) p. 395; Neues elementares Schließungsproblem: zwei feste Kreise und zwei Strahlen.

J. Larmor, Messenger 13 (1884) p. 61, durch Inversion Kreisring auf gewöhnliches *Poncelet*sches Schließungsproblem zurückgeführt, aber schon: Nouv. annal. (2) 1 (1862) p. 184 *Paul Serret* (auf Kugeln dito).

R. Lachlan, Messenger 16 (1887), Verallgemeinerung der *Steiner*schen Aufgabe. (Determinanten; Einführung des imaginären Winkels der beiden sich nicht schneidenden Kreise.)

Ad. Schumann, Die *Steiner*schen Kreisreihen und ihre Beziehung zum *Poncelet*schen Schließungsproblem. Programm Berlin 1883.

Th. Vahlen, Schlömilch 41 (1897) p. 153; Über *Steiner*sche Kugelketten.

C. Flächeninhalt.

13. Pythagoras. Der „Magister Matheseos", noch heute für den Schulunterricht der bei weitem wichtigste Satz der Elementargeometrie, muß nach dem neuesten Stand der Forschung dem *Pythagoras* ab- und den Indern zugesprochen werden. Es kommen in Betracht *G. Thibaut,* Journal of the Asiatic society of Bengal 44 (1874); *v. Schroeder, Pythagoras* und die Inder (1884); ders. Indiens Literatur

und Kultur und vor allem *Albert Bürk*, Das Apastamba-Sulba-Sūtra, Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft (1900) p. 543. Die ganze Darstellung *Cantor*'s von der indischen Geometrie wird dadurch umgeworfen. Bei der außerordentlichen Bedeutung, die das Opfer und der Altar für den Kultus hatte, mußten die Inder die Altäre genau rechtwinklig herstellen. Die Sulba-Sūtra kennen eine Reihe ganzzahliger rechtwinkliger Dreiecke (*Pythagoras*), von denen *zwei* nicht auf der Formel des *Pythagoras* $2a$, $a^2 - 1$, $a^2 + 1$ beruhen, die Inder mußten bei gewissen Zeremonien Quadrate konstruieren, die sich wie 1 : 3 und 1 : 2 verhalten, also den Satz des *Pythagoras* und die Irrationalität kennen; sie mußten dann die Grundfläche ihrer Altäre bei wechselnder Gestalt die gleiche Fläche haben lassen, mußten *Rechtecke* in Quadrate verwandeln etc. Entscheidend ist das Auftreten des Gnomon (Erklärung s. *Cantor*) als Figur, und der Beweis *Bhascara*'s beruht auf alter Tradition. Das Resultat ist: Den Indern mußte der *Pythagoras spätestens im 8. Jahrhundert v. Chr. bekannt sein*, und das Abhängigkeitsverhältnis zwischen Indern und Griechen ist umzukehren. *B. Baldi*'s Leben des *Pyth.* von *E. Narducci*, Bulletino *Boncompagni* 20 (1887) herausgegeben, ist danach zu berichtigen. Freilich kannten die Ägypter den *Pythagoras* schon im mittleren Reiche und die Babylonier vermutlich noch früher.

Geschichte und Zusammenfassung.

Ign. Hoffmann, Der *Pyth.* Lehrsatz mit 32 teils bekannten, teils neuen Beweisen, Mainz 1818 2. Aufl. (1821) (1821 noch 3 Beweise als Anhang).

Richardson, The mathematician monthly (*Runcle*, Cambridge, Amerika) 2 (1860) p. 45; 48 Beweise.

P. A. Meyer, Beiträge zu dem Beweis des *Pyth.*, Programm Metten 1877.

Leop. von Schröder, *Pyth.* und die Inder, Leipzig (1884).

F. Graup, 46 Beweise des *Pyth.*, Leipzig (1880), aus dem Russischen des *Jurg Wipper* übersetzt. Viele Beweise schon bei *Thusis* 1594 (Nasir-Eddin).

Marré, Bullet. *Boncomp.* 20 (1887) p. 404, indischer Beweis durch Flächenteilung.

G. Tarry, *Bourget* (1895) p. 104, sehr richtige Einteilung der Beweise.

A. Bürk l. c. versucht nachzuweisen, wie der Satz gefunden, desgl. *Thibaut*. *P. Treutlein*'s hübscher Versuch, dem Ideengang der Griechen zu folgen, wird dadurch nicht hinfällig, nur statt Griechen lese man Inder: *Schlömilch* 28 (1883) p. 209. Die sehr zahlreichen Beweise zerfallen in 4 Klassen, *Euklid* 1, 47 (Flächenvergleichung). *Euklid* 6, 8 Ähnlichkeit, indische durch Anschauung und Rechnung; direkte Zerlegung in kongruente Stücke wie bei *de Morgan* oder besser bei *Gregorius a St. Vincentio* prop. 45 (1647) (gelegentlich auch Subtraktion). Es braucht kaum noch gesagt zu werden, daß die Beweise sich häufig wiederholen.

Ganz eigenartig ist der Beweis *B. Bolzano*'s in den „Betrachtungen“ von 1804.

Beweis, daß die Hilfslinien *Euklid* 1, 47 sich im selben Punkt schneiden:

J. Hamett, Philosophical magazine 62 (1823) p. 236 Sept. gibt den (alten) Satz an, den *Gergonne, Gergonne* 14 p. 334 mittels *Ceva,* beweist, p. 374 von *B. D. C* als 3 Höhen desselben Dreiecks; ders. Beweis *Grunert* 4 p. 112, *Grunert* „nach Mitteilung"; *Gergonne* und *Querret, Gergonne* 15 p. 84 Verallgemeinerung s. auch *A. Göpel* über Teilung von Vierecken: *Grunert* 4 p. 237. Aus der von *Max Curtze* gefundenen lateinischen Übersetzung des *An-Naîrizi*-Kommentars erfahren wir, daß schon *Heron den Satz gekannt hat* (Supplem. zu *Heiberg* und *Menge*'s *Euklid* 1899).

Pythagoras, der „schöne" Beweis von *E. Riddle;* A Treatise on navigation etc. (1849) 5. Aufl. in allgemeiner Fassung: Errichtet man über zwei Seiten eines Dreiecks beliebige Parallelogramme, bringt die Gegenseiten der Dreiecksseiten zum Schnitt und verbindet diesen mit der gemeinsamen Ecke, so ist das Parallelogramm aus der 3. Seite und dieser Verbindungsstrecke nach Richtung und Größe gleich der Summe der beiden ersten. — *Pappus!* nicht nur bei *Blanchet-Legendre* 1845 Anhang, sondern schon bei *Hoffmann,* der *Augustin*'s Elementargeometrie (1812) als Quelle nennt; s. auch *Recknagel,* Ebene Geometrie (1896) 5. Aufl. und *Henrici* und *Treutlein,* noch als *neu* von *Schönemann* (Soest), *Schlöm.* 37 (1892)!

Der Beweis vom Sechseck, der in sehr viele Lehrbücher, z. B. *Mehler* übergegangen ist, nicht zuerst bei *Tédénat* (Manuel), sondern findet sich in der 2. Aufl. von *Hoffmann* als No. 33 aus älteren Schriften (*Lionardo da Vinci*).

Meyer, Corresp. *Quetelet* 2 (1826) p. 69 (*Pappus*).

H. d'André, Nouv. annal. 5 (1846) p. 324; quelques observations à la figure du carré de l'hypoténuse. U. a. wenn die Spitze sich auf dem Halbkreis über der Hypotenuse bewegt, so dreht sich die durch die Spitze gehende Diagonale des Kathetenquadrates um den Mittelpunkt *R* des Halbkreises; die betreffenden Ecken beschreiben Kreise, welche sich in *R* berühren.

P. Möllmann, Grunert 17 p. 298.

H. Umpfenbach, Crelle 26 (1843) p. 92. Beweis, daß der *P.* sich nicht verallgemeinern läßt.

C. Adams (1846) p. 12, Satz 9, 5. Die merkwürdigen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks.

Nouv. annal. 8 (1849) p. 400, s. *Umpfenbach,* dessen Satz aus *Crelle* 26 übersetzt wird.

Wenn im Dreieck $a^n = b^n + c^n$, so ist $n = 2$, $A = \frac{\pi}{2}$, unvollständig: dazu *J. Sacchi,* Nouv. annal. (2) 1 (1862) p. 330.

Aufgabe: Nouv. annal. (5) p. 167 (*Terquem*?) gelöst von *C. Drouets* p. 413 und 479. Im rechtwinkligen Dreieck ist $x^n < y^n + z^n$, solange $n < 2$ und $>$, wenn $n > 2$; Nouv. annal. 11, p. 457, weit einfacher von *Colombier,* Nouv. annal. 11

p. 20, Brief von *H. Vincent,* Zerlegung eines Quadrats in die Summe zweier, dazu *Poinsot,* Sitzung der Akademie (1849) 7. Mai.

Oscar Werner, Grunert 24 (1855) p. 93; hübscher Beweis (1) des Satzes vom Quadrat der Kathete.

R. Hoppe, Grunert 8 (1846) p. 450, Zerlegung in fünf kongruente Stücke mit *einer* Hilfslinie.

The mathematician monthly (*Runcle,* Cambridge, Amerika) Bd. 1 (1859) zwei Beweise des *Pyth.*; No. 1 Variante von *Bhascara.*

Messenger 5 (1870) p. 186 aus *Smith*'s Prize Paper, ibid. 9. *H. M. Taylor,* Erweiterung des *Pyth.*

Messenger (2) 2 (1872) 103, *H. Perigal,* Eleganter Beweis von *Euklid* 1, 47, On geometrical dissection and transformation.

A. de Morgan, Quarterly journal 1 (1857) p. 236; Methode von *Airy* (*Hoffmann* 17!) und Erweiterung.

Erweiterung des *Pyth*. *M. Azzarelli,* Atti nuovi Lincei, Rom 77 (1874) p. 66. *A. H. Anglin,* Edinb. Proceedings 12 (1885) p. 703.

Präsident *Garfield* (The mathem. magazine, mitgeteilt: Mathesis 2 p. 121) Varianten von *Bhascara.*

A. Thiry, Mathesis 4 (1884) p. 54:

$$J=\frac{1}{2}\,bc=sr=s(s-a),\ \text{d.h.}\ 2bc=(b+c)^2-a^2.$$

Wirkliche Verallgemeinerung durch Affinität von *P. Schönemann, Schlömilch* 29 (1884) p. 316.

W. Harvey, Notes on *Euclid,* Edinburgh mathem. society Proceed. 4 (1886) p. 17.

G. Tarry, Bourget (1895) p. 104 $(A'+D+E'+C+B'=A+B+D+E+C)$

Brand, Bourget (1897) p. 36, *Wolkow, Bourget* (1897) p. 107, sehr hübsch aber schon Nouv. annal. und *Hoffmann* 27 p. 165. *Jakob Steiner,* Ähnliche rechtwinklige Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Hypotenusen. Dieser einfachste Beweis gewiß oft vorher und nachher, z. B. Italienisches Journal von 1899 und andere, auch The mathem. monthly (1859) *J. E. Oliver,* p. 10, vgl. auch *Gauß,* Tagebuch No. 81.

Einfaches Modell zum *Pyth., Hoffmann* 17 p. 99. *J. E. Böttcher* (Leipzig).

L. Mandic, Methode und *Apparat* zur anschaulichen Entwickelung des *Pyth.,* Wien (1896).

K. Zahradnik, Grunert (2) 14 (1895) p. 105; Dreieck der Zentren der Quadrate und Grunddreieck haben denselben Schwerpunkt etc. *E. Cesàro,* Mémoire de Liège (1899); Hilfslinien paarweise aufeinander senkrecht.

Aboulwafa's Lösung von $x^2=3a^2$ ohne *Pyth.,* Nouv. annal. (2) 3 (1864) p. 165. Anonym.

Pythagoras im Raum.

Verbindet man 3 Punkte auf den 3 senkrechten Koordinatenachsen, so ist $\overline{ABC}^2=\overline{ASC}^2+\ldots$, wo S Scheitel:

Rud. Wolf, Grunert 7 p. 44. *Beau, Schlöm.* 38 p. 383, aber schon *Grunert,* Lehrbuch der Mathem. 1832 und noch früher *Carnot* 1801 (Corrélation) und 1803 Géométrie de position, und *Tinseau,* Mémoires présentés etc. 9 (1780).

Der Satz wurde von *Tinseau* 1774 vorgelegt in der allgemeinen Fassung: Das Quadrat einer Fläche ist gleich der Summe der Quadrate ihrer 3 Projektionen auf die 3 senkrechten Koordinatenebenen. Der spezielle Satz 1783, auf ihn erhob *De Gua* Prioritätsanspruch (Essai de Tétraédrométrie, Mémoires de l'Académie 1783). Der *wahrhaft entsprechende Satz der Sphärik: A. W. Velten, Schlöm.* 40 p. 312, vielleicht noch entsprechender zeigt *Ch. Gudermann, Crelle* 42 p. 380, daß für die sphärischen Quadrate (Vierecke mit gleichen Winkeln und Seiten) die Formel gilt $L\left(\frac{1}{4}c\right) = L\left(\frac{1}{4}a\right) + L\left(\frac{1}{4}b\right)$, wo L die hyperbolische Längenfunktion.

Sphärischer Pythagoras.

S. L'Huilier, Gergonne 1 p. 197, Die Analogie zu den fünf bekanntesten Sätzen des rechtwinkligen ebenen Dreiecks; für den *Pythagoras* selbst

$$\sin^2\frac{1}{2}a = \sin^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c + \sin^2\frac{1}{2}c\cos^2\frac{1}{2}b.$$

Joseph Eilles, Grun. 44 (1865) p. 440.

$$\operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b.$$

(Ableitung Schulz Sphärik Bd. 2 p. 114), nur wenn a und b gleichartig.

H. Gretschel verbessert ibid. 45 p. 231 und zeigt, daß die Formel allgemein gilt und mit dem „eigentlichen *Pythagoras*" $\cos c = \cos a \cos b$ identisch ist; dasselbe *K. Knorre* p. 234.

Frz. Unferdinger, Grun. 53 (1871) p. 344; wenn $\alpha + \beta = \gamma$, so ist

$$\sin^2\frac{1}{2}c = \sin^2\frac{b}{2} \text{ etc.}$$

Eine Verallgemeinerung gibt auch *Retali,* Sui sistemi pentasferic. ortogon., Periodico 13 p. 108. Wenn 5 Kugeln zu je zwei orthogonal, so ist

$$\Sigma \varrho_x^{-2} = 0.$$

R. E. Allardice, Note on spherical trigonometry, Edinb. Math. Soc. Proc. 2 p. 53 (1884.)

14. Ptolemäos, vgl. Kreisviereck. Die logische Notwendigkeit der Hilfslinie, welche *Ptolemäos* selbst benutzte, weist *Freier,* Programm Ilfeld 1872 (vgl. Methodik) nach. Bezeichnung, wie sie jetzt für Vierecke gebräuchlich (Seiten a, b, c, d, Diagonalen e und f). Die Beweise zerfallen in vier Gruppen: Durch die Ähnlichkeit mittels der Hilfslinie des *Ptolemäos,* durch Flächenvergleichung, durch Trigonometrie, wie denn die Additionstheoreme der Trigonometrie im wesentlichen sich mit dem *Ptolemäos* decken, und durch Inversion, meist aus der bekannten gleichlautenden *Euler*schen Relation auf der Geraden, z. B. *Clasen,* Transformation, der Figuren durch reziproke Radien 1872. Dazu kommt meist der Beweis von $e:f$, der im wesentlichen beim

analytischen Beweis des *Castillon* (s. d.) von *Lagrange* gegeben und dann von *Castillon* elementargeometrisch bewiesen; er erklärt den Satz, den man heute in der Obertertia als Übungsaufgabe gibt, für ziemlich schwierig. Schwieriger ist der Beweis der Umkehrungen des *Ptolemäos* und von $e:f$. (Zeichen U und U'.)

Historisch:

Glaisher, Educat. times 1874.

J. Ph. Grüson, Crelle 10 (1833) p. 275. In jedem nach den Ecken nicht zentrischen Viereck mit lauter hohlen Winkeln ist die Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten > als ef, davon ist der *Ptolemäos* die Umkehrung.

P. Gerwien, Crelle 11 p. 264 (fehlt Angabe, daß Viereck hohl, sehr hübscher Salz 1). Umkehrung des *Ptolemäos.*

Crelle 13 p. 233 beweist *W. A. Förstemann* die allgemeine Relation $AC + B^2$ aus *Carnot,* géométrie de position. Umkehrung des *Ptolemäos.*

F. Strehlke, Grunert 2 (1842) p. 325; umkehrbar aus Formel F; zugleich für Kugel, aber schon *Lexell* p. 80, Acta Petropolitana (1872), wo das Viereck $ACDB$ heißt:

$$\sin\frac{1}{2}AD\,\sin\frac{1}{2}BC = \sin\frac{1}{2}AB\,\sin\frac{1}{2}DC + \sin\frac{1}{2}AC\,\sin\frac{1}{2}DB$$

und *Cagnoli* No. 1159 seiner Trigonometrie.

C. A. Bretschneider, Grunert 2 p. 239; in jedem Viereck ist

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma),$$

daraus Umkehrung des *Ptolemäos* und Ausdehnung auf die Summe der 6 Rechtecke aus je 2 der 4 Seiten.

Aus *J. F. Pfaff*'s Papieren, *Grunert* 5 (1844) p. 435, Umkehrung rein geometrisch (indirekt) desgl.

J. F. Ch. Hessel (s. *Euler*scher Satz, oder *Paul?*), *Grunert* 8 (1846) p. 215 (direkt, aber nicht frei von Trigonometrie).

A. Jacobi, Crelle 31; (1846) p. 40 *Ptolemäos* und Umkehrung, Doppelverhältnis, auch der Satz bewiesen. Im Kreisviereck ist das Quadrat der 3. Diagonale gleich der Summe der Quadrate der zur fünften und sechsten Ecke gehörigen Tangenten.

E Brassine, Nouv. annal. 6 (1847) p. 226 $e:f$.

Ptolemäos durch *Inversion* zuerst *Möbius* 1852 Sächsische Berichte; gesammelte Werke 2, p. 200 in der *Longimetrie.* Dann:

N. Ferrers, Quarterly journal 1 (1857) p. 32 einfacher, dito: *Taylor, Messenger* (1874) s. u.

A. Desboves, Nouv. annal. 17 p. 263 und Zusatz von *C. C. Gerono.* Wenn: $e:f = (ad+bc):(ab+cd)$, so *Ptol.,* falls Viereck konvex, und $v \cdot v$, wenn Viereck konvex und *Ptol.,* so $e:f$ etc. und Umkehrung. *Amour, Caffarelli*: Nouv. annal. (2) 6 (1867) p. 186.

A. Enneper, Schlömilch 13 p. 261; Über die Bedingung, daß 4 Punkte auf einem Kreis etc. *Ptol.* analytisch.

H. M. Taylor, Messenger 3 (1874) p. 164. Kurzer indirekter Beweis des *Ptol.* (und *Euklid* 6, 3 und 4.)

W. Stammer, Grunert 46 p. 332, Umkehrung des *Ptol.* einfach.

P. Mansion, Nouv. Correspondance (2) (1875) p. 181, sehr einfache Beweise beider Sätze.

H. Hart, Messenger 4 (1875) p. 97 trigonometrisch.

K. Weihrauch, Schlöm. 26 (1880) p. 133.

$$(ab \cdot cd)^2 + (ad \cdot bc)^2 - 2ab \cdot bc \cos(\beta\alpha) = (ac \cdot bd)^2.$$

H. Schnell, Grunert 67 p. 225 ($ac = 2Rh$).

Ch. W. Merrifield, London mathem. society proceed. 12 (1881) p. 214.

A. Andrani, Periodico 2 (1887) p. 175 aus dem Satz ibid. p. 6 über Flächengleichheit.

O. Herrmann, Hoffmann 24 p. 430 (1893) durch Flächenvergleichung ohne Ähnlichkeit. Anschaulicher Beweis nach *Pappus* von *Traub, Hoffmann* 26 p. 256, ibid. p. 259 *Nickel* (Sinus). *A. Emmerich,* ibid. p. 260.

Lecocq, Bourget (1897) p. 9, p. 32, Quadrate der 3 Diagonalen.

E. Catalan, Nouv. Corresp. 5 (1879) p. 295, Ausdehnung des *Ptol.* auf ein Sechseck im Kreis.

J. Casey's Ausdehnung: Wenn Kreise von beliebigem Radius den Trägerkreis in den 4 Ecken berühren, so kann für die Distanz zwischen zwei Punkten die gemeinsame Tangente gesetzt werden. *Casey,* Royal Irish academy (1866), Inversion; A sequel to *Euclid* 103, ganz elementar bewiesen durch *J. H. Taylor,* Quarterly journal 26 (1893) p. 228 und Umkehrung durch die schönen Sätze von *Leudesdorf, Messenger* 19 (1889) p. 14 mit Rechnung.

Bei meiner Anwesenheit in Göttingen im Herbst 1903 bewies Herr *F. Klein* diesen Satz momentan durch „Dilatation“ der Kreise, wobei die Seiten des Kreisvierecks in die gemeinsamen Tangenten übergehen als Beispiel der elementaren Anwendbarkeit der *Lie*schen Kugelgeometrie: Annalen 5 (1872).

15. Inhalt, (Flächenvergleichung). Der Begriff Inhalt, Feld ursprünglich ein rein intuitiver, ist mehr und mehr arithmetisiert, vgl. *Poincaré,* Enseignement 1 (1898) p. 1, und *Hadamard* (s. Lehrbücher) definiert (1897) den Inhalt eines Dreiecks geradezu als Zahl $\frac{1}{2}gh$, vgl. auch *Rausenberger* unten.

G. Monge, Journal de l'école polytechn. cah. 13 p. 68. Ist O ein Punkt und ABC ein Dreieck, so ist $OAB + OBC + OCA = ABC$, der Satz, auf dem die Einführung der Dreieckskoordinaten beruht. Die Unterscheidung des Flächeninhalts als positiv und negativ, je nachdem die Fläche zur Linken oder zur Rechten des den Umfang Durchlaufenden liegt, rührt von *Möbius* her, doch haben schon *Meister,* der Gründer der Hamburger mathematischen Gesellschaft, und *Poinsot* in seinem Mémoire (s. Polygon) die verschiedenen Ufer des Umfanges durch verschiedene Farben gekennzeichnet, und *Meister,* auf den *R. Baltzer* aufmerksam gemacht hat, hat schon positive und negative Flächenteile unterschieden. Der Satz von *Monge* ist durch *Möbius,* baryzentrischer Kalkül 18, allgemein gültig gemacht und dann auf beliebige Polygone ausgedehnt, ibid. 165; vgl. auch: Über Bestimmung des Inhalts der Polyeder; Leipziger Berichte (1865) p. 13. Für ein

Polygon, dessen Seiten sich schneiden (Sternpolygon bezw. Polygon mit mehrfachen Punkten), können die einzelnen vom Radiusvektor, der von O ausgeht und längs des Umfangs gleitet, beschriebenen Dreiecke die *Zellen*, in die ein solches Polygon zerfällt, mehrfach bedecken.

R. Baltzer gab in seinen „Elementen“ (1893) (§§ 9 und 10 der 5. Aufl.) folgende einfache Regel: Indem man von der unendlichen Fläche φ_0, deren Koeffizient Ziffer 0 ist, nach und nach in die einzelnen Zellen eintritt, bildet man aus dem Koeffizienten der verlassenen Zelle den der betretenen durch Addition oder Subtraktion von 1, je nachdem man den Perimeter von rechts nach links oder umgekehrt überschritten hat. Bezeichnet man den schließlichen Koeffizienten der k-Zelle mit c_k, so ist die Fläche gleich $\Sigma c_k \varphi_k$. So hat beim Sternfünfeck die innere Zelle den Koeffizienten 2. (Die Regel ist aber nicht einwandsfrei.)

Eine sehr merkwürdige Formel hat *O. Hermes* aus dem Nachlaß *C. G. J. Jacobi*'s, *Crelle* 65 (1866) p. 173 mitgeteilt und, verallgemeinert auf Polygone mit mehr als Doppelpunkten, bewiesen.

Eine für alle Polygone gültige Bestimmung des Inhalts aus den Koordinaten der Ecken gab *Gauß* in den Zusätzen zu *Schumacher*'s Übersetzung von *Carnot*'s géométrie de position (1860) p. 362 und sie ist von *W. Veltmann*, *Schlömilch* 32 (1887) p. 339 auf ihre Allgemeinheit geprüft und bestätigt, aber schon *weit früher* von *E. Prouhet*, Nouv. annal. 15 (1856) p. 373, der auch den *Monge*schen Satz vor *Möbius* (s. oben) allgemein beweist.

Die Lehre *Euklid*'s von der Flächenvergleichung (Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich) ist wohl zuerst von **Wolfgang Bolyai** im Tentamen juventutis Maros-Vasarhely 1832—33 angezweifelt und durch eine andere ersetzt worden. *Bolyai* stellt den Begriff der endlichgleichen Flächen auf, d. h. solcher, die in eine endliche Anzahl gegenseitig gleicher *kongruenter* Teile zerlegt werden können. Indem er die Ergänzungsparallelogramme (*Euklid* I, 43) in solche zerlegt, beweist er, daß flächengleiche Polygone stets endlichgleich sind, und versucht zu beweisen, daß *Kongruentes von Kongruentem Endlichgleiches gibt.*

Unabhängig von *Bolyai* zeigt **P. Gerwien**, *Crelle* 10 (1833) p. 228, daß sich Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe in gleich viel kongruente Stücke zerlegen lassen (p. 235 Dreiecke auf der Kugel). *Am Schlusse definiert Gerwien Inhaltsgleichheit als Zusammensetzbarkeit aus kongruenten Stücken.*

Die Frage nach strenger Begründung wird wieder in Fluß gebracht durch *A. De Zolt*, Principii dell' eguaglianza di poligoni (1881). Er geht so weit, daß er den Versuch macht zu *beweisen:* Zerlegt man ein

Polygon durch Gerade in mehrere Teile und läßt auch nur einen von ihnen weg, so kann man mit den übrigen das Polygon nicht mehr bedecken. Ich bemerke, und das gilt auch von den Arbeiten *Veronese's*, daß alle Versuche, solche Gemeinverständlichkeiten zu beweisen, darauf hinauslaufen, ein Axiom durch ein anderes zu ersetzen.

An *De Zolt* schließt sich *R. De Paolis*, *Elementi di geometria*, *Torino* (1884) an; er spricht es als *Axiom* aus, daß ein Teil eines Polygons oder Polyeders nicht dem ganzen gleich sein kann. *Faifofer* sucht *Besso*, Periodico di Matematica 1 (1886) p. 13—15, das Axiom zu beweisen, *Paoli* zeigt ebendort p. 44, daß der Beweis nicht streng.

Es folgt: *O. Stolz*, der in seinen Vorlesungen über Arithmetik T. 1 p. 78 *beweist*, daß man zu jedem Polygon ein äquivalentes Rechteck von konstanter Seite finden kann [und damit, daß die ebenen Vielecke (und Winkel) ein „System von absoluten Größen im engeren Sinne" bilden]. Gegen den Beweis, der ausführlicher von *Stolz* in der Zeitschrift für österreichisches Gymnasialwesen 39. Jahrg. p. 297 und 576 dargestellt ist, erhebt *Fr. Schur*, Sitzungsbericht der Dorpater Naturf.-gesellschaft (1892) p. 1—6 einen Einwand und beweist den *Stolz*schen Satz, gestützt auf den obigen von *Möbius*, zunächst für gewöhnliche Polygone; übersetzt im Periodico di Matematica (1893): „Sull' area delle figure piane limitate da linee rette." *Stolz* hat dann in den Wiener Monatsheften 5 (1894) p. 234 seinen Beweis mit dem Satz von *De Zolt* als Axiom vervollständigt. *Er definiert*, zwei ebene Vielecke sind einander gleich, wenn sie entweder kongruent sind oder aus gleich vielen Stücken bestehen, die paarweise kongruent sind.

An *Bolyai* knüpfte *M. Réthy* an: *Clebsch* Annalen 38 (1891) p. 405 „Endlich — gleiche Flächen". Gegen seine Beweisführung erhebt *H. Dobriner*, ibid. 42 (1893) p. 275 Bedenken und sucht zu beweisen: Erweisen sich zwei Flächen bei einer Zerlegung als endlich gleich im Sinne *Bolyai's*, so kann es keine zweite geben, die sie als ungleich erweist. Zum Schluß p. 285 zeigt er, daß die Verwandlung eines n-Ecks in ein $(n-1)$-Eck vom *Parallelenaxiom unabhängig* ist. *Réthy* erwidert p. 297 und sucht die Lücke auszufüllen. Dazu *Rausenberger*, ibid. 43 (1894) p. 301: Das Grundproblem des Flächen- und Rauminhalts. Er beweist unter gewissen Annahmen den Hauptsatz von *Dobriner* und zeigt, daß ebene Polygone nur flächengleich sind (gleiche Maßzahlen haben), wenn sie sich in eine endliche Anzahl kongruenter Stücke zerlegen lassen, und bemerkt, daß dieser Satz nicht für den Raum gilt (s. Volumen).

G. Veronese, Periodico di matematica 10 (1895) p. 130; *Veneto Ist. Atti* t. 6 (1895) p. 421, Dimostrazione della proposizione fondamentale

dell' equivalenza delle figure. Er nimmt als Axiom für Strecken an, daß eine endliche Strecke nicht einem ihrer Teile gleich sein kann, und sucht das Axiom *De Zolt's* als Satz für Flächen zu beweisen. Vgl. auch seine *Elementi di geometria, Padova (1897).*

Zu erwähnen ist noch *G. Biasi*, Periodico 9 (1894) p. 19, 48; Sull' equivalenza etc. *Biasi* hat dann 1903 ibid., gestützt auf *Bettazzi*, Bulletino di Mat. 1, 15 das Axiom *De Paoli's* zu beweisen gesucht. Ferner *Sbrana*, Rivista di matem. 4 (1894) p. 47 und besonders *G. Lazzeri*, Elementi di matem. und Periodico 10 (1895) p. 77, der die Gleichheit von Polygonen auf Ebene und Kugel (dazu auch noch Prismen) unabhängig vom Axiom *Paoli's* oder *De Zolt's* mit Zerschneidung in Dreiecke nachweist, aber an einer Stelle Ähnlichkeitslehre voraussetzt. Ibid. sucht *Frattini*, was vom arithmetischen Standpunkt (Mächtigkeit) selbstverständlich, zu beweisen, daß das Axiom *Paoli's* oder *De Zolt's* im Grunde nur die Endlichkeit des Flächeninhalts der Polygone ausdrückt.

Die *Stolz*sche Definition der Flächengleichheit von Polygonen hat auch **D. Hilbert,** *Grundlagen der Geometrie* 1899, 2. Aufl. 1903; er unterscheidet zunächst Inhaltsgleichheit, wo das *Bolyai*sche Axiom in die Definition aufgenommen ist, von Flächengleichheit und weist schließlich nach, daß unter Voraussetzung des *Archimedes*schen Axioms, also eines *infinitären Prozesses*, beides zusammenfällt. Die Flächenfrage ist von *Ugo Amaldi* dargestellt in dem oft erwähnten Werke von *Enriques*, Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna (1900) Art. 5.

Hilbert zeigt, daß schon der Fundamentalsatz: „Dreiecke von gleicher Grundlage und Höhe sind flächengleich" das *Archimedes*sche Axiom erfordert; an *Hilbert* knüpft *M. Dehn* an (s. Volumen). *H. Vogt*, Programm Nr. 211 Breslau (1904) versteht unter Endlichgleichheit sowohl „*Zerlegung*"- als „*Ergänzungsgleichheit*"; s. auch **J. M. C. Duhamel,** Des méthodes, Paris (1865) bezüglich der Stetigkeit.

Formeln zur näherungsweisen Berechnung beliebig begrenzter Flächen sind von *Simpson* (— Regel), elementarer Beweis von *Saigney*, Géométrie élémentaire p. 245, *Poncelet*, *Catalan*, General *Th. Parmentier* gegeben; dieselben sind von *P. Mansion*, Mathesis 1 (1880) p. 17, p. 53 und Supplement verglichen, der ibid. 7 p. 77 die Fehlergrenze der *Parmentier*schen Formeln bestimmt hat, vgl. auch *J. A. Dupain*, Nouv. annal. 17 (1858) p. 207. Die *Simpson*sche Regel ist nicht zuerst von *Newton* gegeben, sondern nach *Heinrich*, Bibl. math. (3) 1 (1900) p. 92 von *Gregory*, Exercitationes geom. (1668); sie ersetzt die Kurve durch eine Parabel, die mit ihr drei Punkte gemein hat. Bei starker Krümmungsänderung ist nach *Petit Bois*, Mathesis 5 (85) p. 8 die Hyperbel

zweckmäßiger. Die Formel von *E. Catalan* findet sich Nouv. annal. 10 (1851) p. 412, die des General *Parmentier* ibid. 14 (1855) p. 370, dazu Brief 16 (1857) p. 12. Die von *Poncelet* in den Leçons à la faculté des sciences de Paris bei *H. Resal,* Éléments de mécanique p. 28—31. Infolge der Arbeit von *Mansion* gab *Parmentier* Zusätze zu seiner Formel, Assoc. franç. 11. Sess. (1882) p. 320.

Wichtig für den Inhalt ist auch die (funktionentheoretische) Arbeit von *C. G. Reuschle, Crelle* 24 p. 71 „Note über die analytischen Beweise elementargeometrischer Sätze". Zu erwähnen ist auch *O. Terquem,* Nouv. annal. 5 p. 232, Sur les aires etc. Einige Bemerkungen über das kommutative und assoziative Gesetz bei Flächen *M. Simon, Straßburg,* Elemente der Geometrie (1890).

Einzelheiten:

Zindrini, Gergonne 6 p. 55, Division graphique etc. (Dreiecke und Tetraeder im gegebenen Verhältnis; ibid. 18 p. 113 *Vallès*, Ausdehnung auf Tetraeder).

P. Gerwien, Crelle 10 (1833) p. 225, Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben (!!) Stücke; p. 235 Zerschneidung einer beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben (!) Stücke.

Ch. v. Staudt, Über den Inhalt der Polygone und Polyeder, *Crelle* 34 (1842) p. 252.

A. Göpel gestützt auf *Gerwien, Grun.* 4 (1844) p. 237 (Gleichheit, zwei Beweise des *Pythagoras*).

Nerenburger, Correspondance Quetelet (3) 9 (1837) p. 149; Transformation von unregelmäßigen ebenen Figuren in regelmäßige; ibid. 11 (1839) p. 216 *J. S. Russel,* Rechteck, dessen Seiten sich wie $1:\sqrt{2}$ verhalten, geschnitten durch Parallelen zu seiner kleineren Seite, so daß Kette entsteht mit Exponent $\sqrt{2}$.

B. Rivals, Nouv. annal. 6 (1847) p. 387, Teilung des Trapezes durch Parallelen zu den Grundlinien, dazu Note von *L. Anne. O. Terquem,* ibid. 7 (1848) p. 348 macht auf den Satz von *Mascheroni* über den Inhalt ebener Polygone aufmerksam, den *L'Huilier* in seiner Polygonometrie von 1789 (Genf, auf Kosten des Verf.) nachentdeckt hat.

F. Rummer, Umwandlung und Teilung von Flächen (1850).

J. Dienger, Grun. 17 (1852) p. 306. Teilung des Dreiecks.

Euzet, Nouv. annal. (1854) p. 114; Polygon in Teile proportional gegebenen Größen durch Gerade von einem Punkt im Innern (für die Schule!). Note von *Ph. Kelland,* Edinburgh transactions (1855) 19. Febr. *On superposition* Bd. 21 p. 273, 22 p. 471 (dabei *Gnomon* auf 24 Arten in 9 Stücke, welche ein Quadrat bilden); dazu *De Morgan,* Quarterly journal 1 p. 236.

Rob. Brodie, Je zwei geradlinige flächengleiche Figuren in kongruente Stücke, ibid. 36 p. 307; dazu *Muirhead,* Proceedings of the Edinburgh mathem. society 14 (1896) p. 109.

E. Essen, Grun. 22 (1854) p. 56; *Neue Grundlagen,* cf. *Dobriner.*

Die drei merkwürdigen Sätze von *Faure* $\sum \frac{\varphi^2}{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}$. Nouv annal. 17 (1858) p. 50.

C. Taylor, Quarterly journ. 6 (1864) p. 214. Satz über zwei Dreiecke von konstanter Inhaltssumme.

H. Hankel, *Heron*'s Formel fürs Dreieck aus den Nullwerten ohne Rechnung, Leipzig (1864). Über die Vieldeutigkeit der Quadratur und Rektifikation algebraischer Kurven.

Ph. Cotterill, London mathem. society Proceed. 1 (1866) 5; Inhalt von Polygonen.

O. Schlömilch 13 (1868) p. 162, Geometrisches Paradoxon: die Gleichheit von 64 und 65 Quadraten, Verallgemeinerung.

Victor Schlegel, Schlöm. 24 (1879) p. 123. *G. H. Darwin, Messenger* 6 (1876) p. 86, Das Paradoxon von *Schlömilch* „puzzle".

L. Crocchi, Battaglini 10 (1872) p. 304. Außensektor.

H. Perigal, Messenger 2 (1873) p. 103, Geometr. dissections and transpositions, proof of *Pythagoras*, ibid. 4 (1875) p. 102 Note 2, Verallgemeinerung durch *Hart, Messenger* 6 (1877) p. 150.

Russkop, Nouv. corresp. 2 (1815) p. 83; ein Quadrat in acht Teile zu zerlegen etc., ibid. 3 p. 116 *Coaspont,* Teilung des Quadrats in sieben Teile, welche zusammen drei Quadrate bilden; Erweiterung auf zwei Quadrate. — *Maurice d'Ocagne,* Notes sur le partage des polygones; *Bourget,* (1878) p. 332; ibid. *de Tilly,* Formel für Trapez, s halbe Summe der Grundlinie; s' der Diagonalen, d ihre halbe Differenz, so ist $T^2 = -(s^2 - s'^2)(s^2 - d^2)$.

Aur. Faifofer, Elemente der Geometrie (1880); Flächenlehre nach *Duhamel.*

P. Schönemann, Schlöm. 26 (1881) p. 29; Verwandlung eines Rechtecks (*Perigal*) in ein Quadrat; Programm Soest (1884); die mechanische Verwandlung der Polygone, *dito (1888).*

W. Peddie, Edinb. Math. Soc. Proceed. 4 (1885) p. 29, Rechteck in Quadrat.

C. Gusserow, Über anschauliche Quadraturen und Kubaturen (s. Volum); Festschrift des Dorotheenst. Realgymnasiums, Berlin (1886), ders. *Leitfaden für Stereometrie* (1885), Anhang 3.

M. Simon-Berlin, Hoffmann 19 (1888) p. 401, Zerschneidung flächengleicher Figuren in kongruente Stücke.

P. Dziwinski, Lemberg (1886) (polnisch), desgl.

O. Ber, Lond. mathem. society Proceed. 22 (1891) p. 34 Quadrat verdreifachen, ders. p. 36 On an area equal to a given semicircle.

A. Lugli, Periodico 6 (1891) p. 93, Polygonteilung.

E. C. Hudson, Messenger 24 (1895) p. 177; the area of a polygon.

L. Gérard, Bulletin de la société Math. de France 23 (1895) p. 268; Sur le postulat etc. (statischer Satz von *Varignon*).

Arnold, Educational times 69 (1898) p. 108, 13 806; Ein Dreieck durch eine Parallele zur Basis zu halbieren, ohne Ähnlichkeitssatz.

H. Lebesgue, Sur la définition de l'aire d'une surface, Compt. Rend. 129 (1899) p. 870. Die Fläche eines krummlinig begrenzten Feldes im Raum wird definiert als Grenze der Summe der geradlinig begrenzten Minimalflächen.

M. Dehn, Math. Annal. 57 (1903) p. 314; Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke. Ein Quadrat läßt sich nur in Quadrate von kommensurabeln Seiten zerlegen. Ein Rechteck mit inkommensurablen Seiten läßt sich nicht in Quadrate zerlegen; der Beweis erfordert etwas Algebra.

H. Dobriner, Leitfaden etc. (s. oben).

Satz von *Brune* (s. bei Viereck).

Der Winkel, als Grenze des Kreissektors aufgefaßt von *Stein*; *Gergonne*, uv. annal. 5 p. 232, also lange vor *mir*. (Einzelheiten auch bei Polygon.)

16. Isoperimetrie mit Einschluß räumlicher Probleme. Ursprüngh bei *Zenodor* (*Nokk*, Programm Freiburg (1860)), oder *Pappus*. Bemmung der Figuren, welche bei gegebenem Umfang größten Inhalt ben, dann aber auch umgekehrt bei gegebenem Inhalt kleinsten Umıg. Im 17. und 18. Jahrhundert mit den verwandten Maximumsfgaben vielfach Übung für Differential- und Variationsrechnung, B. *G. O. Fagnano*, acta eruditorum (1775), problemata quaedam etc.; *mentargeometrisch von Simon L'Huilier*, De relatione mutua capacita- etc. Warschau (1782); abrégé d'isoperimétrie élémentaire; *Polygonoïrie* (1789); De la corrélation des figures (1801), Éléments d'analyse 309). Es handelt sich besonders um den (elementaren) Nachweis, ß der Kreis und die Kugel Isoperimetrie besitzen, was schon *Zenodor* hauptet hat und vor ihm die Pythagoreer. *J. Steiner* hat *Crelle* 18 d *Liouville* 6 beide Sätze elementargeometrisch zu beweisen gesucht. r Beweis ist für den Kreis von *J. Edler* vervollständigt worden; für Kugel wirklich streng erst von *H. A. Schwarz*, Göttinger Nachhten (1894) p. 1—13, aber nicht elementargeometrisch gegeben; *hwarz* ist von der Voraussetzung, daß ein Maximum existiert, frei; ht minder streng ist der Beweis von *H. Minkowski*, Deutsche Mathetiker-Vereinigung 9 (1901) p. 115 (vgl. Volumen).

Historisch:

Eneström, Bibl. math. (2) 2 (1888) p. 38, Streit der *Bernoulli*; ibid. (3) 2 (1901) 5 *Schmidt*, Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertum.

Gergonne 4 (1813—14) p. 338, Recherches de la surface plane de moindre itour etc., Kreis und Kugel, elementar aber nicht streng, *Abonné* (meist *Gergonne* bst). Von den 4 Sätzen, welche *Gergonne* als Aufgaben gestellt hat, wird der te vom Trapez p. 344 von *C. Castenau* bewiesen, die drei anderen Prisma-, und allepipedonstumpf betreffend, von einem *Abonné*.

Abonné, *Gergonne* 13 (1822) p. 133, Kreis, Kugel. Von allen Trazen, welche gleiche Basen und Inhalt haben, besitzt das gleichschenklige Isoperimetrie, entsprechend für Pyramiden. Vervollständigung: d. 14; Jede Kurve, in der jede Gerade, welche die Mitten zweier rallelen Sehnen verbindet, auf den Sehnen senkrecht steht, ist ein eis, entsprechendes gilt für die Kugel; ibid. 15 p. 115. *C. Bouvier*, bscher Beweis der Isoperimetrie des Quadrats und Würfels (elemengeometrisch schon von *L'Huilier*):

$$x = pt;\ y = \frac{t}{q};\ z = \frac{qt}{p}\,\frac{p}{q} + q + \frac{1}{p} < 3;\ (p-q)^2 + q(p-1)$$

$-\,1) < 0$; was da p und $q > 1$ absurd (Kritik p. 265).

Jakob Steiner, 1. *Crelle* 17 (1837) p. 83—91 (23. Jan., Vortrag in der Berliner Akademie); Maximum und Minimum des Bogens einer beliebigen Kurve im Verhältnis zur zugehörigen Abszisse oder Ordinate (*Crelle*scher Satz von 1811); schon hier kommt er auf den Schwerpunkt. 2. *Crelle* 18 (1838) p. 281; Auszug aus Vorlesung am 1. Dez. 1836. Einfacher Beweis der zwei Hauptsätze: 1. Unter allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe hat das gleichschenklige die kleinste Schenkelsumme. 2. Satz vom Trapez, *Gergonne* 13. 3. Verwandlung eines Vielecks in ein Vieleck kleineren Umfanges und höchstens $2n-2$ Seiten, welches in bezug auf irgend eine Achse x symmetrisch ist und dadurch in den Kreis (Schwäche in § 4), dann auf den Raum: Kugel, Zylinder, Kegel. *Liouville* 6 (1841) p. 105; französisch übersetzt (Comptes rendus 12 (1841)), abgedruckt *Crelle* 24 p. 93, Fortsetzung französisch, *Crelle* 24 (1842) p. 189. In den gesammelten Werken p. 179, p. 245 die deutschen Originale. Es sind die Hauptarbeiten *Steiner*'s für Isoperimetrie. Auf fünf verschiedene Weisen (die fünfte die interessanteste) wird der Satz vom Kreis zu beweisen gesucht; die zweite Abhandlung geht dann in Nr. 27 auf den Raum ein und beweist die Sätze: Unter allen $n$seitigen Prismen ist dasjenige regelmäßige isoperimetrisch, welches von einer Kugel in den Schwerpunkten berührt wird (32, 1), desgl. für Pyramide und Doppelpyramide. In 64, 2 wird die Vermutung ausgesprochen, daß dies für alle Polyeder gelte. Es folgen zwei Beweise für die Isoperimetrie der Kugel. Ein Teil der Resultate in den Aufgaben und Lehrsätzen sowie in den Nummern 3, 5 bis 12 der gesammelten Werke.

H. Thibault, Nouv. annal. 2 (1843) p. 480; Sur les figures planes ou sphériques d'égal périmètre ou d'égale surface (Kreis).

H. Umpfenbach, Crelle 25 p. 184, Kreisvieleck von allen Vielecken gegebenen Umfangs größten Inhalt; beweist nur, daß es Maximum sein kann, und auch nur für Fünfeck; *Crelle* 26 (1843) p. 181, *Fasbender* durch Rechnung und allgemein. *Mourgues*, Nouv. annal. 2 (1843) p. 229, sehr einfacher Beweis, daß unter den Streckenzügen, welche einem Bogen einbeschrieben sind, der regelmäßige der größte, unter den umgeschriebenen der kleinste sei.

Schell, Grunert 19 p. 450, Maximum-Aufgaben, elementargeometrisch

K. H. Schellbach, Mathemat. Lehrstunden (1860), Isoperimetrie des Kreises (Maximum und Minimum).

Theodor Berner, *Schlömilch* 11 (1866) p. 81: Über Maximum und Minimum geometrischer Figuren. Satz über die Linie des größten Flächeninhalts auf einer beliebigen Fläche und über Polyedermaxima. Bei jeder Linie C größter Fläche auf F ist der Krümmungsradius von C in bezug auf F konstant (und bleibt bei Verbiegung). **Satz 6:** Bei

einem Polyedermaximum fällt der Schwerpunkt jeder freien Seitenfläche zusammen mit dem der begrenzenden Kanten, wenn man an jedem Punkt einer Kante die Masse $\cot\frac{\alpha}{2}$ setzt, wo α der entsprechende Kantenwinkel ist, und das Massenverhältnis ist konstant.

L. Lindelöf, Bulletin de St. Pétersbourg 14 (1869) p. 257; Auszug: *Clebsch* Annal. 2 (1870). Unter allen Polyedern, welche gleiche Oberfläche, gleiche Anzahl und gegenseitige Neigung der Seiten besitzen, hat das einer Kugel umschriebene größtes Volumen. Sind die Neigungswinkel unbestimmt, so ist das isoperimetrische. Polyeder einer Kugel umschrieben, und die Berührungspunkte fallen mit den Schwerpunkten zusammen. [Beide Sätze von *Steiner* für Pyramiden und Doppelpyramiden bewiesen und allgemein vermutet, im wesentlichen schon bei *Th. Berner*, Satz 6.] Daß die *Lindelöf*schen Sätze gewissen Einschränkungen unterworfen sind, hat *E. Kötter*, *Crelle* 110 p. 198 rechnerisch gezeigt. *Lindelöf* soll schon Comptes rendus etc. à Helsingfors (1860) 27. Jan. mit Differentialrechnung die Isoperimetrie des Höhendreiecks (s. merkwürdige Punkte des Dreiecks) bewiesen haben und hat in den Acta societatis Fennicae (1866) Jan. den Punkt kleinster Entfernungssumme in einer sehr bemerkenswerten Arbeit behandelt.

Maximaltetraëder bei Flächen mit gegebenem Inhalt (Höhenschnittpunkt), (*Lagrange* (1773) Berliner Akademie), *L. Painvin*, Nouv. annal. (2) 1 (1862) p. 267, Existenzbeweis durch umständliche Rechnung; ***C. W. Borchardt,*** Berliner Akademie (1865) 29. Juni, sehr elegante Determinantenrechnung (*Baltzer*, Determinanten, 4. Aufl.). *L. Kronecker*, ibid. (1872), desgl. *Borchardt*, der die algebraische Identität mit dem Problem Ellipsoid von kleinstem Volumen bei gegebenem Inhalt einer Anzahl von Querschnitten zeigt. *V. A. Lebesgue*, Comptes rendus t. 66.

Franz Mertens, *Crelle* 83 (1877) p. 180; sehr kurz, die Lösung und die Existenz bewiesen.

Walberger, Blätter für bayrisches Gymnasialwesen 9 (1873) p. 183, sehr elementar, aber Isoperimetrie des Kreises nicht streng.

F. Edler, cand. math. in Halle, *Hoffmann* 10 (1879) p. 245 und Göttinger Nachrichten (1882) 8. März, Bulletins des sciences mathém. 2 (7) p. 198.

1. Zu jedem gegebenen unregelmäßigen ebenen n-Eck läßt sich ein regelmäßiges von höchstens 2^{n-1} Seiten konstruieren, welches bei kleinerem Umfang *nicht* kleineren Inhalt hat. 2. Jedes regelmäßige Polygon hat *kleineren* Inhalt als die Kreisfläche von gleich großem Umfang.

Für die Isoperimetrie des Kreises siehe auch *Fried. Meyer*'s Bearbeitung von *Wiegand*'s Planimetrie 73 (1885) und sein Programm *Halle* 1891, wo sich sehr einfache Beweise der Isoperimetrie des gleichseitigen Dreiecks und des Quadrats finden.

R. Sturm, *Crelle* 96 (1884) p. 36. Zu *Steiner*'s Aufsatz über Maximum und Minimum. 1. Korrektur des *Steiner*schen Satzes über den Sektor als isoperimetr.

Figur der vom Winkel abgeschnittenen. 2. Verallgemeinerung des *Edler*schen Beweises des Hauptsatzes auf den Sektorsatz. 3. Einbeschriebene Polygone vom kleinsten Umfang und gleicher Seitenzahl. (*Steiner, Crelle* 24 (1) Nr. 63 etc.) Das Fußpunktviereck des Kreisvierecks; allgemein sind diejenigen isoperimetr., welche mit den Seiten des gegebenen Polygons gleiche Winkel bilden (wie das Höhendreieck). Dazu *E. Lampe*, p. 78; Das Minimum des Inhalts eines Vierecks bei gegebenen Seiten (Maximum das Kreisviereck). *R. Sturm, Crelle* 97 p. 49; Über den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten; dort *Literatur* des Problems, das schon *Tédénat, Gerg.* 1 p. 285—292 und *L'Huilier.* ibid. p. 297 be handelt haben. Dazu *Ulrich,* Programm Fürstenschule Grimma (1886). *G. Baldauf,* Programm Plauen 568 (1898). Über die Punkte kleinster Summe der absoluten Abstände von n Geraden (in der Ebene und im Raum). Die Isoperimetrie ist in dem elementaren Lehrbuch von *P. A. MacMahon*, s. Nr. 4, Amerika, ausgiebig berücksichtigt.

R. Sturm, Crelle 96 p. 1; Würfel und reguläres Tetraeder als isoperimetr. Körper.

P. Mansion, Mathesis 9 p. 112, 212, L'arc de grand cercle est le plus court chemin. Kritik der Beweise von *Legendre, Blanchet, J. Delaunay, Hoüel* (vergl. Sphärik); elementarer Beweis des Satzes: Man kann auf unendlich viele Arten einer beliebigen Kurve Vielecke einschreiben, deren Umfang größer als der Bogen.

J. Lange, Grunert (2) 2 (p. 430). Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima. Educational times (1894) Nr. 60 11 985, neuer (?) Beweis, daß für den *Fermat*schen Punkt (Dreiecksseiten unter Winkeln von 120°) die Entfernungssumme Minimum.

R. Hoppe, Grun. (2) 13 (1895) p. 69. Einachsige Polyeder von kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen.

E. Neovius, Clebsch Annalen 31 (1887) p. 359. Wenn ein Winkel gegeben und darin der Punkt M, durch M die Gerade zu ziehen, welche zwischen den Schenkeln Minimum (*L'Huilier* (1795) und in *Gergonne* 2 p. 17).

D. Dreieck.

Die neuere Dreiecksgeometrie, von den Franzosen auch Géométrie Brocardienne genannt, siehe in dem Referat der Enzykl. von *Neuberg*, vgl. darüber auch die Einleitung. Bezeichnung: Die Seiten a, b, c, die Winkel A etc., der Radius des Umkreises R, des Inkreises r, die Ankreise r_a etc., die Zentren O, J, J_i etc., der Höhen(schnitt)punkt H, der Schwerpunkt S, der Inhalt $\triangle$, der halbe Umfang p, die Seitenergänzungen p_a etc. oder $p - a$ etc.

17. Merkwürdige Punkte. a. ***Feuerbach.*** In der „Solutio facilis", Novae commentationes Petrop. 11 (1765) p. 103 bestimmt *Euler* die Lage und die Entfernungen vom Höhen(schnitt)punkt ($= E$), Schwerpunkt ($= F$), Zentrum des Inkreises ($= G$), Zentrum des Umkreises ($= H$) durch die Koordinaten in bezug auf A als Ursprung und AB als Abszissenachse; er findet dabei OJ^2 (aber *nicht* in der Form $R^2 - 2r\varrho$), und daß HSO in *einer Geraden E* (*Euler*sche Gerade) und

so, daß $HO = \frac{3}{2} HS$ und $SO = \frac{1}{2} HO$ ist (p. 114). *Carnot* in der géométrie de position (1804) fand dasselbe. *Feuerbach* bewies 1822, daß der Kreis durch die Seitenmitten auch durch die Höhenfußpunkte geht (eigentlich umgekehrt) und sein Zentrum N auf E liegt und so, daß die Verhältnisse 1 : 2 : 3 : 6 sind; er erwähnt *nicht*, daß der Kreis die oberen Höhenabschnitte halbiert, dagegen beweist er den merkwürdigsten Satz (*Feuerbach*scher Satz), daß dieser Kreis alle Berührungskreise des Dreiecks berührt. Der Beweis ist *einfach* durch rechnende Geometrie, nicht ohne Trigonometrie vorauszusetzen. Daß der *Feuerbach*sche Kreis AH etc. halbiert, haben *Brianchon* und *Poncelet*, *Gergonne* 11 p. 215 théor. 9 der Hyperbole équilatère gezeigt, wo die Konfiguration $ABCH$ ziemlich erschöpfend behandelt ist. Seitdem heißt der Kreis bei den Franzosen, z. B. *Bobillier* (vielleicht schon 1832) und *Mention*, Nouvelles annales 9 (1850) Kreis der 9 Punkte, dagegen *John Casey* noch 1861 Kreis der 6 Punkte.

Der *Feuerbach*sche Satz blieb so unbekannt, daß er von *Terquem* (1841) nachentdeckt werden konnte, desgl. von Sir *W. Hamilton* und *Hart* etwa 1860, obwohl ihn *Steiner* im *Gerg.* 19 und in den geometrischen Konstruktionen von 1833 (p. 55 Anmerkung) erwähnt. Erst in allerneuester Zeit haben sich Franzosen und Engländer entschlossen, den Neunpunktkreis nach *Feuerbach* zu benennen. Der Satz findet sich auch in der ausgezeichneten Schrift *Ch. Nagel*'s „Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise“ (1836) und bei *C. Adams* (1846) „*Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks*“, wo sich auch alle Eigenschaften der *Symmediane*, sowie des sogenannten *Lemoine*schen bezw. *Grebe*schen Punktes finden. Und *Reuschle* in den mathem. Abhandlungen, Programm Stuttgart 1853 spricht schon aus, daß der *Feuerbach 32 Kreise berührt, lange vor Hamilton*; endlich *H. von Holleben und Gerwien* verwerten ihn ausgiebig in ihrer viel zu sehr vergessenen Aufgabensammlung (1831).

Geschichte:

History of the nine point circle *J. S. Mackay*, Edinb. Proceed. 11 (1893) p. 19. — Die grundlegende Schrift heißt: „Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte (der Ausdruck hier wohl zuerst) des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmter Linien und Figuren.“ Eine analytisch trigonometrische Abhandlung von *Karl Wilh. Feuerbach*, der Philosophiae Doktor, mit einer Vorrede von *Karl Busengeiger*, ordentlichem Professor der Mathematik an der großherzoglich badischen Universität Freiburg, Nürnberg 1822.

Sie enthält zunächst eine Reihe von Relationen über die Be-

rührungskreise, davon viele neu, ist überhaupt eine Fundgrube von Relationen, die seither in den Nouvelles annales, dem *Bourget*, den Educational times etc. immer wiederkehren. So z. B.

$$AJ \cdot BJ \cdot CJ = 4r^3 R;\quad DEF : r = D'E'F' : r' \text{ etc.} = \triangle : 2R;$$
$$a^2 + AH^2 = 4R^2$$

lange vor *Steiner* (aber nach *Carnot*, géométrie de position). Im 2. Abschnitt wird das Dreieck der Höhenfußpunkte behandelt; daß sein Umfang im spitzwinkligen Dreieck Minimum, wird im 6. Abschnitt rein geometrisch bewiesen; es wird gezeigt, daß die Verbindungsgerade der Projektionen eines Höhenfußpunktes auf die beiden anderen Seiten konstant und gleich dem halben Umfang ist. Im 4. Abschnitt Bestimmung der gegenseitigen Lage der vorzüglichsten bisher betrachteten Punkte, z. B. OH^2 etc., hier in § 57 ganz direkt $NJ = \frac{1}{2}R - r$; $NJ' = r' + \frac{1}{2}R$, wodurch der *Feuerbach*sche Satz bewiesen ist. Der 5. Abschnitt enthält dann Sätze wie: Jedes Dreieck ist selbst mittlere Proportionale zwischen dem Dreieck der Berührungspunkte eines seiner Berührungskreise und dem Dreieck der drei anderen Zentren der Berührungskreise; die Dreiecke sind ähnlich, und der betreffende Punkt J ist Ähnlichkeitspunkt. Auch der Satz über die konstante Potenz von H ist von *Feuerbach* oder bei *Feuerbach*; ebenso ist ihm die Konfiguration $ABCH$ nicht entgangen, sowie der Zeichenwechsel für die Radien der Berührungskreise.

In den geometrischen Konstruktionen von 1833 hat *Steiner* die Quelle aller dieser Beziehungen (z. B. daß $AH = 2OA'$, *Monge, Carnot, Feuerbach*) in der doppelt ähnlichen Abbildung von Höhenpunkt und Schwerpunkt aus angegeben; auch noch drei fragwürdige Punkte zu den neun hinzugefügt.

O. Terquem, Nouv. annal. 1 (1842) p. 196; *Feuerbach*scher Satz mit Erweiterung (projektive Beziehung) auf die Kegelschnitte (C_2), wo die Höhen durch den Seiten konjugierte Eck-Transversalen ersetzt werden.

J. Wolstenholme, Quarterly journal 2 (1860) p. 138 elementar; ähnlich wie *Steiner*, und Kreisviereck-Satz: Der Halbkreis halbiert die 6 Zentralen der 4 Berührungskreise (*Mention* 1850); ibid. *Sir W. Hamilton*, algebraisch, Konstruktion der Berührungspunkte und der gemeinsamen Tangenten.

A. Hart, Quarterly journ. 4 (1862) p. 152, geometrisch nach Bericht von *Salmon*. Verlängert man OJ über J um sich selbst bis x, so ist $xH = R - 2r$, darauf gründet *Hart* einen sehr einfachen Beweis des *Feuerbach*schen Satzes; *Salmon* hat in der 4. Aufl. der Conic sections vier Beweise, darunter einen sehr eleganten, der von *W. Hamilton* stammt. Ibid. gibt *J. Casey*, „On Dr. *Hart*'s, *Sir W. Hamilton*'s and other properties of the six point circle" den ersten rein elementargeometrischen Beweis des *Feuerbach*schen Satzes, konstruiert zugleich die Berührungspunkte, so auch A sequel to *Euclid* (in *Salmon*'s Conic sections

finden sich noch zwei sehr elegante Beweise mit Dreieckskoordinaten); ibid. p. 260 *Hart*, Ausdehnung des *Feuerbach*schen Satzes auf die Kugel. *Sir W. Hamilton*'s Brief an *Hart* zeigt, daß der Seitenmittenkreis eines sphärischen Dreiecks die Berührungskreise nicht tangiert; *Hart* zeigt, daß es einen solchen Kreis gibt, und berichtet, daß *Salmon* und *Sir W. Hamilton* für den Radius $-\frac{1}{2}\operatorname{tg} R$ gefunden. Der *Hart*sche Satz gehört in das Taktionsproblem: Nimmt man irgend drei von den acht Kreisen, welche drei gegebene berühren, so kann ein Kreis beschrieben werden, der diese drei berührt und einen vierten von den acht Berührungskreisen. Von *Casey* durch Inversion bewiesen: Proceedings of the royal Irish academy (1866) 9. April p. 396—423 (höchst bedeutend).

Sehr einfache Konstruktion der Berührungspunkte des *Feuerbach*schen Kreises mit den Kreisen; s. auch A sequel to *Euclid* (1881).

Mc Dowell, Quarterly journ. 5 (1862) p. 269; einfach geometrischer Beweis des *Feuerbach*schen Satzes (kennt den *Casey*schen nicht) mittels teilweiser Umkehr eines *Casey*schen Kreissatzes; ibid. p. 313 *H. R. Greer* mit Dreieckskoordinaten; ibid. p. 318 *J. Casey*, *sehr* einfache Konstruktion der Berührungspunkte des *Feuerbach*schen Kreises mittels der zweiten gemeinsamen Tangente der Ankreise (s. Taktionsproblem), *G. Battaglini*, Rendiconti Napoli (1862)] Sept. Daß der *Feuerbach*sche Kreis die 12 In- und Ankreise der Dreiecke ABH etc. ebenfalls berührt, ist vor *Sir W. Hamilton*, Quarterly journ. 4 p. 219, schon von *Mention*, *Nagel*, *Reuschle* l. c. ausgesprochen, *Casey* für den Umkreis als *Feuerbach*scher Kreis der vier Dreiecke aus je drei Zentren der Berührungskreise analoger Satz, aber vorher *Nagel*, *Adams*, *Reuschle*, *Mention* etc. Ibid. 6 (1864) *Salmon*'s Konstruktion des Zentrums des sphärischen *Feuerbach*schen Kreises. (Die Arbeit gehört in die analytische Geometrie dreier Dimensionen.) Ibid. p. 226 *Griffiths*, Der Neunpunktkreis, der Umkreis und der Kreis, der in bezug auf ABC autopolar ist, (Zentrum H, Radius $\sqrt{4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\varrho}$) sind koachsial, S ist Pol der Radikalachse in bezug auf den Kreis H; mit Dreieckskoordinaten. Ibid. 7 (1866) p. 47 *W. F. Walker*, Satz von *Griffiths*, elementargeometrisch; zuerst dort, daß HP durch die *Simson*-Linie (s. d.) gehälftet wird. *Griffiths* p. 50 (Dreieckskoordinaten): Auch die Polarkreise von A, B, C und der Polaren H koachsial mit *Feuerbach*. Ibid. p. 302 *W. H. B*; Kreis der 9 Punkte analog wie *Feuerbach*.

C. C. Gerono, Nouv. annal. (2) 4 (1865) p. 220; elementargeometrische Konstruktion der 4 Berührungspunkte mit dem Lineal, elementarer Beweis (*Hamilton*'s Gedanke). *Gerono* erwähnt den elementaren Beweis: Giornale di matematica al uso degli studenti delle univers. ital. 1 (1863) von *N. Trudi*, Intorno etc. (Nota di *Eug. Beltrami*, Intorno alle coniche dei nove punti (1863) Bologna Mem. (2) 2 p. 361).

K. Kücker, *Grunert* 47 (1867) p. 1, Über die ausgezeichneten Kreise des Dreiecks; *Feuerbach*scher Satz; Satz: Projiziert man eine Ecke, z. B. A auf W_2 und W_3, so geht die Verbindung der Projektionen durch B' und C' (vgl. Winkelhalbierende); die drei Kreise, von denen jeder einen der Ankreise umschließend, die beiden anderen ausschließend berührt, schneiden sich in *einem* Punkte.

N. Ferrers, Quart. journ. 9 (1868) p. 147 kurz analytisch. Das Zentrum der *Steiner*schen Hypocycloide ist das des *Feuerbach*schen Kreises.

J. Lappe, *Crelle* 71 p. 387, rein geometrisch, aber Lehre von der Radikalachse, und Kreisbüschel. *Fuhrmann*, *Grun.* 62 desgl.

W. Binder, Brief an *Baltzer* (1892) rein elementargeometrisch; von *Baltzer* publiziert in der 3. Aufl.

C. W. Baur, *Schlömilch* 12 (1867) p. 354 mittels Rechnung Konstruktion der Berührungstangenten zwischen Inkreis und *Feuerbach*schem Kreis, von *H. Schubert*, *Schlöm.* 16 p. 83 vervollständigt.

H. Schröter, Rückführung auf den *Ptolemäus*, *Clebsch* Ann. 7 (1874) p. 517, derselbe benutzt: *Crelle* 68 (1868) p. 208 die Theorie der Kegelschnitte, rein elementargeometrisch, aber vieles, was schon bei ***J. Mention***, Nouv. annal. 9 (1850) p. 324 und *E. Bobilier*, Éléments de géométrie (1831), insbesondere *die Benutzung der zur Dreiecksseite symmetrischen gemeinsamen Tangente.*

John P. Taylor, Quarterly journ. 13 (1875) p. 117 gibt den bis dato elegantesten Beweis des *Feuerbach*schen Satzes mittels Inversion. (Gestützt auf Satz von *Mc Dowell* (?) weist er nach, daß $A'H_a$ im *Feuerbach*schen Kreis den Winkel $|B-C|$ faßt, was auch ganz elementar einleuchtet etc.)

J. Neuberg, Nouv. correspondance 1 (1875) p. 160, Sur le cercle des neuf points; ibid. 4 (1878) p. 2 7. *Mennesson*, sehr kurz, Dreieck und Höhen als Projektion einer Pyramide; ibid. 5 (1879) *Chadu*, *Feuerbach*scher Satz. *Malloisel*, *Bourget* (1878) p. 97 1. Bogen über H_a und A' faßt $(B-C)$ — *Taylor* —; 2. wenn man auf W_a von B und C die Lote fällt, so sind die Vierecke $H_aDA'E$ inskriptibel und die Zentren dieser Kreise sind auf dem *Feuerbach*schen Kreis (vor *Taylor* vom Artillerieleutnant *Calabre* ohne Beweis *Malloizel* mitgeteilt.)

James Booth, *Bourget* (1879) p. 3 *Feuerbach*scher Kreis, *Feuerbach*scher Satz, Fortsetzung p. 298.

Satz von ? Wenn D der Punkt, wo Kreis J Seite BC berührt und E der zu J_1 gehörige und Kreis über DE die zu AB konjugierte gemeinsame Tangente von J und J_1 in F und G schneidet, so liegen F und G auf dem *Feuerbach*.

H. Schubert, *Hoffmann* 13 (1882) p. 19, recht elementar.

K. Österreicher, Programm Wien (1882); Der *Feuerbach*sche Kreis; im wesentlichen *Feuerbach*, im Anhang einige eigene Sätze.

McMichael, *Messenger* 11 (1882) p. 77; *Feuerbach*scher Satz, elementare Umkehrung des *Casey-Hart*schen Satzes über die Differenz der Quadrate der Tangenten (s. Kreis); ibid. (1884) *C. Leudesdorf*, Zusammenstellung und eigener Beweis der Berührung.

E. Catalan, Nouv. annal. (3) 2 (1883) p. 82; *Feuerbach*scher Kreis durch die 8 Zentren der Inkreise der 3 „Annex"dreiecke des Mittelpunktdreiecks; ibid. *Lemoine* (rekurrente Geometrie); *M. Jenkins*, Educational times 7185 (1883) 39. Ders. *On some geometr. proofs* Quarterly Journ. 21 (1886) p. 89 und dann *H. M. Taylor*, Lond. Math. Sec. Proc. XV (1884) p. 122.

J. Lange, Programm Berlin (1884); Die Berührungskreise eines ebenen Dreiecks und deren Berührungskreise; er hatte schon vorher: *Grunert* 66 (1881) p. 220 und 67 p. 191 den Neunpunktekreis behandelt.

S. Kantor, *Schlömilch* 25 (1880) p. 54; *Feuerbach*. Berührungspunkt des *Feuerbach*schen Kreises und des Ankreises ist merkwürdiger (Symmetrie) Punkt für das Dreieck der 3 Berührungspunkte auf den 3 Seiten.

B. Ziegler, Zeitschrift für Realschulwesen 9 (1884) p. 143; Über den *Feuerbach*schen Kreis (einfach und elegant).

E. Lemoine, Nouv. annal. (3) 5 (1886) p. 122; Dreieckskoordinaten; Bezug auf *Gerono*'s (1865) Konstruktion der Berührungspunkte.

W. Godt, *Grunert* (2) 14 (1886) p. 436; sehr hübscher Beweis des *Feuerbach*schen Satzes: Verbindet man jeden der Berührungspunkte mit den Mitten der Seiten, so ist von diesen 3 Strecken immer eine gleich der Summe der beiden andern. *Die Diagonalpunkte des Vierecks* der 4 Berührungspunkte liegen auf den Seiten des Mittendreiecks.

J. Lange, *Grunert* (2) 3 (1886); Beweis des *Feuerbach*schen Satzes nach *Schröter* (*Clebsch* Ann. 7).

W. v. Miorini, Programm Bielitz (1886); *Feuerbach* vom Standpunkt der neueren Geometrie.

Lignières, *Bourget* (1886) p. 3; Beweis des *Feuerbach*schen Satzes (Zentralen).

Simmons, ibid.; wenn $(A - B) = 90$, so liegt das Zentrum des *Feuerbach*schen Kreises auf AB (*Taylor*, *Malloizel*); ibid. *E. Lemoine*, p. 193 Gleichung der gemeinsamen Tangente an den *Feuerbach*schen Kreis und einen Berührungskreis. (Größte eingeschriebene Ellipse.)

M. F. F. Tarjon, Nouv. annal. (3) 7 (1888) p. 288 (Kreis um H mit konstanter Potenz von H, vgl. *Griffiths*, *Feuerbach* als Ort der Schwerpunkte einer Schar von Vierecken, etc.).

R. W. Genese, London mathem. society proceedings 19 (1888) p. 216; beweist elementar den *Feuerbach*schen Satz.

A. Gob, Mém. Soc. Roy. Liége (2) 16 Nr. 3 (Suppl. Mathesis 9, 1889); Sur la droite et le cercle d'*Euler*.

E. Lemoine, *Bourget* (1889); question 803. Zieht man durch A' etc. die Symmetrischen zu a etc. in bezug auf eine beliebige Richtung, so schneiden sich diese 3 Geraden auf dem *Feuerbach*schen Kreise.

R. Slawyk, *Schlömilch* 35 (1890) p. 36; *Feuerbach* projektiv.

J. J. Milne, *Bourget* (3) 4 (1890) p. 3—5, sehr einfach und elegant, mit ganz elementarem Satz: AB feste Tangente an Kreis K in B und durch D Gerade, welche AB in E trifft und auf DE Punkt M so gewählt, daß $DE \cdot DM =$ Potenz von D, so ist der Ort von M ein Kreis, der durch D geht (Peripheriew.) und Kreis K in B berührt.

Friedrich Meyer, Städtisches Gymnasium zu Halle, Programm (1891).

Arth. Cayley, *Messenger* 23 (1893) p. 23; On the nine-points circle; analytisch geometrisch. Radien nach den Berührungspunkten halbieren Winkel zwischen den Radien nach den nicht zugehörigen Höhenpunkten.

J. Neuberg, Mathesis 14 (1894) p. 183 elementarer Beweis des *Feuerbach*schen Satzes; ibid. p. 42 einfache Ableitung der Neunpunktigkeit in bekannter Weise durch Kreisviereck.

J. Lange, Geschichte des *Feuerbach*schen Kreises, Progr. Berlin (1894), 34 S., 20 Beweise mit Quellenangabe sachlich geordnet; vorangeschickt Abriß der Geschichte der merkwürdigen Punkte des Dreiecks.*)

*) Diese wichtige Schrift war Ref. entgangen, und ist er durch Herrn *Lampe* bei der Korrektur auf sie hingewiesen worden, auch die Aufgaben in *Hoffmann*'s Zeitschrift wären zu berücksichtigen gewesen. Vergl. „Sammlung der Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums der ersten 25 Bände". Leipzig, Teubner 1888, p. 246—287 „Neuere Geometrie des Dreiecks".

J. S. Mackay, Edinb. mathemat. society (1883) 13. April, gedruckt 1894; ibid. 13 (1895) p. 26, *R. F. Davis*, sehr einfach *Feuerbach*scher Satz.

L. Vautré, *Bourget*, (4) 4 (1895) 63 p 83; *Feuerbach*scher Satz, ganz elementar.

Soons, Mathesis 16 p. 57; Man projiziert die Ecken auf eine Gerade *m* und die Fußpunkte wieder auf die 3 Seiten, die 3 Projektionslote schneiden sich in *M*, geht *m* durch *O*, so liegt *M* auf dem *Feuerbach*schen Kreis.

W. Godt, Münchener Berichte 26 (1896) p. 119—166 (aber nicht elementar); Über den *Feuerbach*schen Kreis und eine *Steiner*sche Kurve.

Davis, Educational times (9484) 64 (1896) p. 57; dito (12 801) *Hillyer*.

V. R. Aiyar, Edinb. mathem. society proceedings 15 (1897) p. 74; Beziehung zwischen dem Kreis durch die Schnitte zweier konfokaler Kegelschnitte und dem *Feuerbach*schen Kreis. Verallgemeinerung der allgemeineren Sätze von *McCay* (Irish Acad. Juli 1885).

J. Lauvernay, *Bourget* (1899) p. 193 (einfach aber künstlich).

N. Schmidt, Programm Athenäum Luxemburg (1901); Sur le cercle des neuf points; sehr vollständige Zusammenstellung.

Feuerbachscher Kreis im Raum.

E. Prouhet, Nouv. annal. (2) 2 (1863) p. 132; Im Tetraeder mit Höhenschnittpunkt *M* geht eine Kugel durch die Fußpunkte der Höhen, die Schwerpunkte der Seiten und teilt die oberen Höhenabschnitte im Verhältnis 2 : 1.

J. C. Lewis, *Messenger* 11 (1882) p. 36; Wenn die Gegenkanten eines Tetraeders aufeinander senkrecht stehen, so liegen die 4 *Feuerbach*schen Kreise der Seiten auf einer Kugel.

C. Intrigila, Nap. rendiconti (1883) p. 69; Sul tetraedro, die wahre Verallgemeinerung: Kugel durch die Schwerpunkte der Seitenflächen geht durch 12 merkwürdige Punkte. Ihr Zentrum harmonisch zu dem der Umkugel, dem Schwerpunkt und dem Zentrum des Höhenhyperboloids.

S. Roberts, London mathem. society proceedings 19 (1888) p. 152. Zwei Verallgemeinerungen des Satzes für den Raum (Kugel der 16 Punkte etc.).

Die erste Aufgabensammlung, in der der *Feuerbach*sche Satz ausgiebig verwandt ist, ist *v. Holleben* und *Gerwien* (1832).

Eulersche Gerade, *E*; *J. Wolstenholme*, Educat. times 40, 5426 (1884) p. 74; die beiden Punkte, deren Abstände von den Ecken des Dreiecks *ABC* proportional den Sinus, ebenso die, deren Abstände proportional den Kosinus der zugehörigen Winkel sind, liegen auf *E*. Beweis analytisch durch Rechnung (*J. Lange*, geometrisch beim Referat in den Fortschritten).

H. Schoute, *Schlömilch* 32 (1887) p. 59; Ein geometr. Problem.

Eine elementare Verallgemeinerung des *Feuerbach*schen Satzes am Dreieck, *MacMahon*, London mathem. society proceed. 14 (1883) p. 129. (Note von *M. Jenkins* p. 132.) Der *Feuerbach*sche Kreis spaltet sich in 2 Kreise mit gleichen Radien, elementar.

b. Winkelhalbierende.

Zumeist der sogenannte *Lehmus-Steiner*sche Satz, der mit demselben Recht auch *Terquem*scher heißen könnte. Zu gleichen (inneren) Winkelhalbierenden gehören gleiche Winkel. Die Winkelhalbierenden sind dabei bis zur Gegenseite gerechnet. Dann das Problem: Das Dreieck aus den 3 Winkelhalbierenden zu konstruieren.

Der *Lehmus-Steiner*sche Satz „L" wurde 1840 von *Lehmus* brieflich *Steiner* mitgeteilt und von diesem ziemlich umständlich, *Crelle* 28 (1844) p. 375, Gesammelte Werke 2 p. 321, bewiesen, auch für das sphärische Dreieck und verallgemeinert: Wenn die Winkel eines Dreiecks durch gleichliegende Linien in gleichem Verhältnis geteilt werden, so sind die Winkel gleich, Zeichen: (A. L.)

O. Terquem, Nouvelles annales 2 (1842) p. 79 (Trigonometrie nach *Euler*); trigonometrischer Beweis p. 87; der Satz ist p. 54 als Aufgabe gestellt und die *folgenden* sind ausdrücklich als *Steiner*sche bezeichnet.

Rougeoin, ibid. p. 138; durch hübsche Betrachtung von Grundlinie und Winkel an der Spitze; Dreiecke kongruent, wenn sie in b, β und w_b übereinstimmen; ibid. 311, *St. Paer,* Peripheriewinkelkreis; *Rud. Wolf* (Züricher Astronom), *Grunert* 3 (1843) p. 449 (auch sphärisch, wenn $\alpha + \gamma < \pi$); *Th. Lange Grunert* 13 (1849) p. 337 (A. L.); *Grunert* selbst p. 341 L, $w_\beta = w_\gamma$, Faktor $b - a$, was schon *Terquem* angedeutet. *W. Mink, Grunert* 15 (1850) p. 358. *Lehmus* selbst zwei Beweise, mitgeteilt von *Th. Lange* ibid. p. 223 der erste ganz elementargeometrisch. *R. Baltzer, Grunert* 16 (1851) p. 201; *A L* sehr hübsch: *A. Seebeck,* ibid. p. 202, Satz: Wenn die Ecktransversalen durch einen Punkt einer Winkelhalbierenden gleich sind, so sind die Winkel gleich. Von den Querlinien durch eine Winkelhalbierende ist die auf der Winkelhalbierenden Senkrechte die kürzeste, von je zweien die die längere, welche von ihr am meisten abweicht (also symmetrisch gleich), auch für sphär. Dreieck, und von *F. August* ibid. p. 259 ähnlich wie *R. Baltzer; Zech* p. 356 (länger wie *August*) ibid. 18 p. 357, *C. Schmidt; T. Clausen* 20 p. 459; *Ch. Nagel,* p. 470 sehr hübsch und rein geometrisch, den Umkreis heranziehend; auf denselben Gedanken verfiel *H. A. Schwarz* in seiner ersten Arbeit, *Grunert* 37 (1861) p. 445 (fehlt in den gesammelten Werken); *A. Niegemann, Grunert* 41 (1863) p. 151, sehr einfach, trigonometrisch.

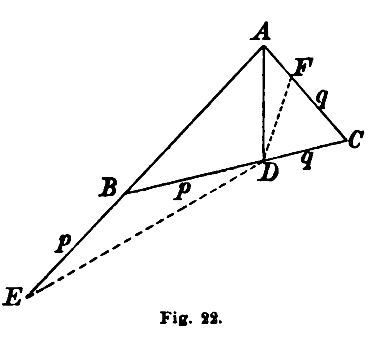


Fig. 22.

Anonymus, Nouv. annal. 13 (1854) p. 192.

N. Devylder, ibid. p. 332 *A L* (aber nicht einfach);

E. Lavelaine, p. 333, $w_a^2 = bc - pq$; ibid. 14 p. 32, Note zu 13 p. 332. Zusatz von *L. Bourdelles* 16 (1857) p. 102. (Fig. 22.)

S. Günther, Hoffmann 23 (1892), Literatur, eigener, nicht strenger Beweis; *P. v. Schaewen,* ibid. 24 (1893) p. 438, einfach trigonometrisch; *Gerlach,* algebraisch

9*

wie *R. Wolf,* p. 439; *Krüger, Hoffmann* 25, untersucht auch die Gleichheit von innerer und äußerer Winkelhalbierender.

A. Emmerich, Hoffmann 26 (1895) p. 173; Wenn $w_a^1 = w_c^1$, so ist entweder $a = c$ oder $AJ^2 = BJ \cdot CJ$, trigonom.; ders., *Hoffmann,* 29 (1898) p. 91 trigonom.; *A. Schiappa Monteira, Teixeira* 8 (1886) p. 51, zwei neue Beweise.

A. Bernotti, Supplemento al periodico 2 (1899) p. 66, Beweis mit den Mitteln von *Euklid I* (Lösung der 9ª quistione a concorso).

Der kürzeste Beweis ist wohl der folgende:

$$w_b(a+c)\sin\frac{\beta}{2} = 2J, \text{ also wenn } w_b = w_c, \text{ so ist:}$$

$$c\sin\frac{\beta}{2} - b\sin\frac{\gamma}{2} = a\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Wenn aber $$\sin\frac{\gamma}{2} > \sin\frac{\beta}{2}, \text{ so ist: } \cos\frac{\gamma}{2} < \sin\frac{\beta}{2},$$

also müssen infolge des Sinussatzes beide Seiten 0 sein (derselbe Beweis auch sphärisch, wenn J den Eckensinus bedeutet).

Nach einer Mitteilung von *E. Lampe* soll sich neben verschiedenen recht einfachen Beweisen auch dieser im Supplemento al periodico di matemat. 1899 finden. Im Suppl. al Per. 2 (1899) p. 5 ist außer der oben angeführten Literatur noch zitiert:

Rieke, Mathematische Unterhaltung, 1867 p. 38, 1868 p. 48.
F. Giudice, F. Ferrari, Periodico di Mat. 8 (1893) p. 31 u. 186.

In Lehrbüchern: *C. Adams* (1846); *Die merkwürdigen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks* p. 10 und 11; zwei Beweise, 1 von *L. Moosbrugger.*

L. A. Kunze, (1851) p. 221. *J. MacDowell,* London (1881) p. 116 der Exercises on *Euklid.* Einen Beweis, der vom *Parallelenaxiom unabhängig,* gab *G. Tarry, Bourget* 19 (1896) und *H. F. Blichfeldt,* Annals of math. (2) 4 (1902) p. 22.

Eine Fundgrube von literarischen Notizen über Eigenschaften der Winkelhalbierenden ist *Mackay*'s: Properties connected with the angular bisectors of a triangle; Edinb. Math. society proceedings 13 (1895) p. 37; doch sind die Angaben nicht absolut richtig. So gibt *Mackay* für den Satz: „Projiziert man 2 Ecken auf eine Winkelhalbierende, so entsteht ein harmonisches Punktsystem" *Fuhrmann 1890!* an, und ebenso ist mir der Satz von „*Townsend*", Educat. times 14 (1870) p. 76 vom harmonischen Mittel zwischen b und c schon seit meiner Schülerzeit bekannt, da beide Sätze unmittelbare Folgen des Fundamentalsatzes der harmonischen Teilung und des Satzes des *Apollonios* sind. Es fehlt z. B. *C. G. Reuschle*'s Programm von 1850 Stuttgart: Über die winkelhalbierenden Strecken im Dreieck. In der Nouv. correspondance (1880) p. 186 steht der Satz: „Das Dreieck

der Fußpunkte der Winkelhalbierenden auf den Seiten ist gleich dem Produkt der Winkelhalbierenden dividiert durch den doppelten Umfang."

Hind, Trigonometrie, 4. édition (1841) p. 304. Wenn P und Q die Projektionen von B und C auf w_a etc, so ist $AQBP = \Delta = AQ' \cdot BP'$ etc. (*Mackay*). *W H. Levy,* Ladies' and gentlemen's diary (1855) p. 71. Die Kreise um einen Höhenfußpunkt und die zusammengehörige Projektion der beiden andern Ecken auf die Winkelhalbierende sind gleich dem Umkreis. Ebendort s. auch *Th. Weddle,* Symmetrical properties of plane triangle (1843, 45, 48) und die Sätze von *J. W. Elliott.*

Arth. Lascases, Nouv. annal. 18 p. 171. Question. Die 4 Projektionen einer Ecke A auf die 4 nicht zugehörigen Winkelhalbierenden sind auf einer Geraden $B'C'$; Beweis äußerst einfach; einen Beweis mit Hilfe der *Simson*schen Geraden von *Wilkinson* (1862) s. *Mackay* l. c. p, 4, aber schon Nouv. annal. 18 (2) 11 p. 265 bei *Léon Vidal* (Schüler) derselbe Gedanke. *Compagnon,* Nouv. annal. (1872) p. 127; *E. Hain, Grunert* 58 (1875) p. 90; Über die Winkelhalbierenden; Dreiecke der Winkelhalbierenden. *Désiré André,* Nouv. correspond. 1 (1874) p 25; Nouv. annal. (2) 13 p. 10; Theoreme über innere und äußere Winkelhalbierende aufeinander zurückgeführt; $w_a^2 = bc - pq$ (wo p und q die Abschnitte auf a); *Michez,* Nouv. correspond. 5 p. 157; Satz wie bei *Townsend*; ibid. (1880) *E. Cesàro,* Jeder Punkt der Geraden, welche die Endpunkte zweier w verbindet, hat von der dritten Seite einen Abstand gleich der algebraischen Summe der Abstände von den beiden andern (entsprechend für Tetraeder).

G. Dostor, Bourget (1880) p. 20; Einfache Beziehung der Abstände der w; *Bourget* (1883) p. 118; Aufgabe in Verbindung mit dem *Feuerbach*schen Kreis, Gleichung von *Droz-Farny* ganz elementar. *Hoekstra* Wiskund. Opgawen (w_a ist auch Winkelhalbierende von $\beta A \gamma$, wo β und γ die Punkte sind, in denen w_b und w_c die Seiten von LMN treffen.

J. Lauvernay, Bourget (1894); $AED \sim AFD$; $AD^2 = AE \cdot AF = (c+p)(b-q) = bc - pq$ etc.; ders. *Bourget* (1896) p. 36. Fig. 22 vgl. *Laveleine.*

Meurice, Mathesis 14 p. 92 (auch Beweis des *Lehmus*schen Satzes); *v. Jettmar* (?) Das Dreieck, welches die Berührungspunkte der In- bezw. Ankreise verbindet (Resultate schon bei *Feuerbach* 1822).

Das Problem: Das Dreieck aus den 3 Winkelhalbierenden aufzulösen: *v. Renthe-Fink* (Premierleutnant): *Crelle* 26 p. 273. Gleichung 16. Grades für r, welche er aber nicht aufstellt. *F. Bützberger,* Ein mit der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes planimetrisches Problem, Dissertation Bern (1889). *W. Heymann, Hoffmann* 28 (1897) p. 165. Zum Problem der Winkelhalbierenden. Drei Gruppen 1) $w_a w_b w_c$; $w_a w_b' w_c'$; 2) $w_a' w_b' w_c'$; $w_a' w_b w_c$; 3) $w_a w_b w_a'$ etc. Gruppe 1 und 3 auf Gleichung 10. Grades; Gruppe 2 mittels quadratischer und kubischer Gleichungen lösbar; ders. *Schlömilch,* 35 p. 254 w's bis an den Umkreis s_i und d Durchmesser des Umkreises:

$$d^3 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)\, d + 2 s_1 s_2 s_3 = 0.$$

F. J. van den Berg, Nieuw. Arch. 16 (1889) p. 179. r als Hilfsgröße; noch Gleichung 16. Grades.

P. Barbarin, Mathesis 16 (1896) p. 143.

A. Korselt, Hoffmann 28 (1897) p. 81; Gleichung 3. Grades, wenn $b = c$ und *Lehmus-Steiner*scher Satz; und *abschließend: A. Korselt, Schlömilch* 42 (1897) p. 304; über das Problem der Winkelhalbierenden; er stellt die Gleichung 10. Grades auf für $w_a w_b w_c$ und beweist, daß das Problem sich im allgemeinen weder mit *Lineal und Zirkel, noch mit Hilfe beliebiger Wurzelgrößen lösen läßt* (vgl. auch idem Progr. *Plauen,* N. 629 (1901).

Der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ist selbst Gegenstand einer sehr wichtigen axiomatischen Untersuchung *Hilbert*'s geworden: London mathem. society proceedings 35 (1903) p. 50—68 und erweitert Anhang II der 2. Aufl. seiner Grund lagen (1903). Daraufhin sind dann die Voraussetzungen untersucht, unter denen sich der Satz und damit die Kongruenz symmetrischer Dreiecke der Ebene ohne Hineingehen in den Raum beweisen läßt.

c. Die gewöhnlichen merkwürdigen Punkte des Dreiecks (vgl. Feuerbach).

I. Höhenpunkt.

Daß die 3 Höhen sich in *einem* Punkt H schneiden, findet sich, obwohl vermutlich schon früher bekannt, bei *Archimedes* und wird durch den Satz vom Kreisviereck in den Scholien bewiesen. Als spezieller Fall des *Ceva*schen Satzes ist der Satz trigonometrisch unmittelbar gegeben. Der einfache Beweis mittels der Parallelen durch die Ecken (Symmetrieachsen) stammt vielleicht von *Gauß,* Note zu *Schumacher*'s Übersetzung von *Carnot*'s géométrie de position (1810, Werke 4 p, 396). Daß die Höhen die Winkelhalbierenden des Höhendreiecks A, B, C sind, ist von *Feuerbach* l. c. § 24 bemerkt, vgl. auch *Brianchon* et *Poncelet* l. c. *J. Mackay* hat in seiner so vollständigen Zusammenstellung: Edinb. Math. Soc. proc. 1, für den ersten Beweis *F. J. Servois* als Quelle angegeben (Solutions peu connues Metz 1804 p. 15, Aufgabe 12). Dort wird nur der Satz bewiesen, daß die oberen Höhenabschnitte doppelt so groß sind wie die Lote in den Mitten der Seiten; für den zweiten Beweis gibt er irrtümlich *Möllmann, Grunert,* Archiv 17 als erste Quelle an.

Der 2. Beweis ist von *Ch. Gudermann,* niedere Sphärik (1834), auf das sphärische Dreieck ausgedehnt, aber der Satz ist schon 1809 von *De Stainville,* Recueil de problèmes, Paris, analytisch bewiesen und von *Cornely,* Correspondance *Hachette* (1814) 3. Jan. p. 5 elementargeo-

metrisch. Mittels des Potenzsatzes (Radikalzentrum der 3 Kreise über den Seiten) von *C. F. Arndt, Grun.* 5, dito der 3 Kreise über den Höhen *C. G. Reuschle, Schlömilch* 11 (1866) p. 475.

Als der homologe Punkt zu O von S aus im Grundverhältnis $1:2$ ist H bei *Steiner*, geometrische Konstruktionen etc. (1833) (*Servois!*).

Die Konfiguration $ABCH$ ist von *Carnot*, De la corrélation (1801) § 143, von *Feuerbach* l. c., von *Brianchon* et *Poncelet* l. c. (Hyperbel) und andern behandelt; dazu *C. Beyel*, Sätze über das orthogonale Viereck $ABCH$: *Schlömilch* 34 (1889) p. 218. Eine Menge Sätze, besonders über die Schnitte der Potenzkreise (um H mit $\sqrt{AH_1 \cdot HA_1}$, um A mit $\sqrt{AH \cdot AA_1}$, etc.), aber das meiste schon bei den Erwähnten und *Grunert* (*Grun.* 41), *Nagel* (1836), *Reuschle* (1866), am vollständigsten *R. Townsend*, Modern geometry (1863) p. 220.

Das Höhendreieck hat im spitzwinkligen Dreieck Minimum des Perimeters, wie *Fagnano* (problemata quaedam etc.) acta eruditorum (1775) Juni rechnerisch gezeigt hat; elementargeometrisch bei *La Frémoire-Catalan* und sehr hübsch (Triest) *Laudi*, *Bourget* (1877) p. 170; aber schon (1863) *G. B. Marsano*, Considerazioni sul triangulo rettilineo p. 18; die elementare Ableitung von *H. A. Schwarz*, Gesammelte Werke 2 p. 344 ist aus Versehen in *Steiner*'s Werke aufgenommen; *Friedrich Meyer*, Mitteilung aus dem Lehrplan etc. Halle (1891). Der Umfang ist bei *Feuerbach* bestimmt (2. Abschnitt). Die Eigenschaften von H sind bei *Reuschle, Schlömilch* 11 (1866) p. 475 zusammengestellt.

Der Name „Orthocentre" zuerst bei *W. H. Besant* (1869) in conic sections treated geometrically.

Als Zentrum des Kreises, für den das Dreieck *autopolar* ist, hat ihn unabhängig von den Engländern *Grunert, Grun.* 41 (1863) betrachtet (rechnerisch). Der Name *Orthozentrum* für H rührt nicht von *James Booth* her, wie in Mathesis erwähnt wird.

Die 6 Projektionen der Fußpunkte auf die Seiten liegen auf *einem* Kreis*), die 3 Hauptdiagonalen des Sechsecks sind gleich. Umkehrung des Satzes vom Dreieck $A_1B_1C_1$, *E. Catalan*, Nouv. correspondance 1 (1874) p. 31. Die Hauptsache schon bei *Feuerbach* § 20. Dort geht auch schon aus Fig. 6 hervor, daß die Radien auf den Seiten des Höhendreiecks senkrecht stehen (vgl. Beweis des 3. *Nagel*schen Satzes, Nouv. annal. 14 p. 440), s. auch Nouv. correspondance (1880) p. 183.

---

*) *Vuibert*, Journ. Mathém. Élément. Nov. 1877 von *Eutaris* (Pseudonym für *Restiau*) cf. *MacBay*, Proc. Edinb. Math. Sc. Vol. 14, Session 1895—1896 p. 43.

E. Lucas, Nouv. correspondance 1874 p. 218. Die Lote von den Mitten der Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ schneiden sich; ibid. *Brocard*, Die Höhen eines Dreiecks bestimmen auf dem Umkreis ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$. Die Gerade $\alpha\beta$ schneidet AB in c_1 etc., so sind $a_1b_1c_1$ kollinear; ibid. 6 (1880) p. 182 *Millet*scher Satz (*Nagel?*). Die Geraden von den Ecken nach den Mitten des Höhendreiecks schneiden sich in *einem* Punkt (die Ecken des Urdreiecks sind für $A_1B_1C_1$ die I_a); ibid., p. 145 *Brocard* (Note von *Catalan*) Schar der Höhendreiecke und ihrer Winkel.

J. Sylvester, Educational times 40 (1884) p. 77, Nr. 7428. Ist M Angriffspunkt der 3 gleichen Kräfte MA, MB, MC, so geht die Resultierende durch H; *Schlömilch, Hoffm.* 10 (1880) p. 351, Aufg. 87, vgl. *Salmon*'s Satz bei *Feuerbach*. *Droz-Farny, Bourget* (1894) p. 215; Lote von H auf die beiden Winkelhalbierenden von A seien HF, HG, so geht FG durch die Mitte von BC; Lösung von *Greenstreet* sehr elementar; Zusatz von *Dhavernas, Bourget* (1895) p. 37.

Relationen zwischen den Höhen selbst und ihren Abschnitten (vgl. auch Trigonometrie) sehr zahlreich bei *C. Adams*, Die merkwürdigen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks (1846) Abschnitt 3; *C. Hellwig, Grunert* 18 (1852) p. 14 ganz elementargeometrisch. Der Potenzkreis um H wird auch sehr häufig behandelt z. B. *Farjon*, Nouv. annal. (3) 7 (1888) p. 288; vor allem *Reuschle, Schlömilch* 11 p. 475 und *Townsend* (1863): Chapter of modern geometry. Aufgaben bei *E. Grebe*, Programm Marburg 1856. Eine wichtige Schrift für die merkwürdigen Punkte etc. ist auch *G. B. Marsano*, Considerazioni sul triangolo rettilineo Genova (1863).

Berührungskreise.

Zentren J J_1 etc. Satz von *Gergonne*. Die 3 Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises schneiden sich in *einem* Punkt (Punkt von G). Der entsprechende Satz von ***Ch. H. Nagel***, „Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise" (1836). Die 3 Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der Ankreise auf den Seiten selbst schneiden sich in *einem* Punkt (Punkt von N). Mitteilungen nach *Nagel, Gergonne*, Nouv. annales 19 (1860) p. 354. Der Satz wurde nachentdeckt von *Townsend*, modern geometry p. 171, p. 172. *F. J. Harnischmacher, Grunert* 42 (1864) p. 90. Beweis nach *Harnischmacher* von *W. Mink, Grun.* 43 p. 1. *Grun.* 43 p. 483 gibt *Reuschle* wichtige *Nagel*sche Sätze über das Zentralendreieck aus je 3 J an; aber fast alle diese Sätze finden sich ihrerseits wieder schon bei *Feuerbach* (1822), wie sie auch im wesentlichen darauf zurückgehen, daß O für die Konfiguration der 4 J der *Feuerbach*sche Kreis ist; z. B. der Satz: Je 3 J bestimmen ein Dreieck, das dem Berührungsdreieck der 4 J ähnlich und ähnlich liegend (O) ist. Das Zentralendreieck und das aus den Mitten seiner Umkreise sind kongruent und perspektiv (O) etc.

Auch die wichtigsten Relationen zwischen den 4 r und R etc. (vgl. Trigonometrie), soweit sie nicht schon bei *Euler, Fuß, L'Huilier, Carnot,* sind bei *Feuerbach* zuerst, z. B die u. a. von *Steiner* und *Bobillier* nachentdeckte Relation $r_1 + r_2 + r_3 = r + 4R$ (p. 4 und nicht p. 5, wie *Baltzer* angibt).

$$\sum r_i r_k - r\sum r_k = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ etc. etc.}$$

Relationen, die in den Journalen der elementaren Geometrie immer wiederkehren (auch bei *Adams* (1846)). *Reuschle* erwähnt l. c. das gleichseitige Sechseck aus J_k und O'_k (O' Zentrum des Zentralendreiecks); aber auch diese Gleichseitigkeit ist bei *Feuerbach* bemerkt, nur nicht der Satz, daß die Seiten des Sechsecks die Seiten des Urdreiecks in den Berührungspunkten der Ankreise schneiden. Die Ausdrücke Inkreise und Ankreise von *Reuschle,* Programm Stuttgart (1853) (wohl auch *Nagel*) gebraucht.

Zu den Relationen gehört auch *Schlömilch, Schlöm.* 38 (1893) p. 310; aus den $4r$ lassen sich Vierecke konstruieren, welche für des spitzwinklige Dreieck reell, für das rechtwinklige Dreieck in eine Gerade ausarten und für das stumpfwinklige imaginär sind.

Die Sätze von *Nagel* über das Zentralendreieck, z. B.: Die 12 Radien von den $4J$ auf die Seiten schneiden sich in den Zentren etc., beansprucht *Mackay* für *T. S. Davies,* Philosophical magazine 2 (1827) p. 26—34. Bei *Adams* (l. c.) der Satz (12): Die Zentrale wird durch Ecke und Gegenseite harmonisch geteilt.

F. J. Richelot, Astronomische Nachrichten 42 p. 215; ΣPA sin (PB, PC) Maximum für das Zentrum des Inkreises.

V. Jamet, Nouv. annal. (2) 11 (1872) p. 35; $2(R+r) = AH + BH + CH$.

J. Neuberg, Nouv. correspond. 1 (1874) p 63; *Gambey,* Nouv. annal. (2) 13 (1874) p. 35, 43 trigonometrisch; Berührungsdreieck des Kreises J ist $\sim J_1 J_2 J_3$ (*Feuerbach, Nagel*); Nouv. Corresp. 3 p. 221 *van Aubel,* Die Geraden, welche einen beliebigen Punkt mit den Zentren der 3 Ankreise verbinden, bestimmen auf den Seiten 6 Segmente in Involution (*Ceva*); ibid. 4 p. 315, 364 *Mansion, van Aubel,* $\sum \frac{AJ^2}{bc} = 1$ etc; ibid. 5 p. 413 *Haerins*: In jedem Dreieck liegen die symmetrischen Punkte von J_1 etc. in bezug auf O auf einem Kreise, dessen Zentrum J und dessen Radius $2r$ ist.

James Booth, Bourget (1879) p. 298; die Summe der 4 Dreiecke aus den Berührungspunkten ist gleich dem doppelten Urdreieck, wenn man das Inkreisdreieck negativ nimmt (*Feuerbach*).

Harry Hart, Quarterly journal 18 (1882) p. 363; die 4 Kreise, welche die 4 Inkreise orthogonal schneiden, haben jeder das fehlende J zum Zentrum, die 6 Radikalachsen sind die Winkelhalbierenden.

H. M. Jeffery, Quarterly journ. 23 (1888) p. 180; Berührungskreise der 4 J zu je 3, sphärisch p. 190.

Satz von *A. Mannheim*, Ein Kreis berührt zwei Dreiecksseiten und den Umkreis von innen, so ist J die Mitte der Sehne, welche die Berührungspunkte auf den Seiten verbindet. *Bourget* (1897) p. 124; drei neue Beweise von *A. Mannheim*, der p. 142 die *Feuerbach*sche Relation OIO_{IK} beweist.

Eine äußerst vollständige Zusammenstellung der Relationen zwischen den 4 r und R, auch den Höhen, Seitenergänzungen p (d. i. s), $(p-a)$ bezw. p_1 (oder s_1) etc. bei *Mackay* in den Edinb. Math. Soc. proceedings 1 (1883) und (Nachtrag) 12 (1894) p. 86.

Umkreis.

Zentrum O; $AH = 2OA_1$; elementargeometrisch bei *Feuerbach*, Abschnitt 6 und *Steiner* (1833), aber vorher *Carnot*, géométrie de position und *F. J. Servois*, solutions peu connues (1804). *Jamet*, Nouvelles annales (2) 11 (1872) p. 35: Die 3 Lote vom Zentrum J auf die Seiten $R+r$. Als *Feuerbach*scher Kreis der Konfiguration der 4 J ist er von *Feuerbach*, *Nagel*, *Bobillier*, *Mention* etc. erkannt worden; damit ist denn auch zugleich der sogenannte *Beltrami*sche Satz bewiesen: Der Umkreis halbiert alle 6 Zentralen der Inkreise (und daher ist sein Zentrum O der Schwerpunkt der 4 J). *Feuerbach* hat den Satz nicht direkt ausgesprochen, wohl aber *Nagel* (1836); sehr elementar ist der Beweis bei *Adams* (1846) Lehrsatz 10, der umgekehrt dadurch beweist, daß der *Feuerbach* die Seiten halbiert; und *M. G. A. Osborne*, The mathematician monthly (*Runcle*) Cambridge (Amerika) 1 (1859) p. 159. Der Satz findet sich bei *Beltrami* (als Spezialfall eines allgemeineren) in den Memorie di Bologna (2) 2 (1862) p. 361 (letta nella sessione 12. März 1863). *Beltr.* spricht die Halbierung nicht direkt aus. Der Satz ist als *Beltrami*'scher von *Grunert*, *Grun.* 42 (1864) p. 354 mitgeteilt und durch Rechnung von *Ed. Nöggerath* 43 p. 89, *R. Lobatto* p. 234 bewiesen, von *C. Schmidt* p. 238 geometrisch und sehr ähnlich von *Reuschle* p. 364, der p. 483 den Satz für *Nagel* reklamiert und den eigentlichen Satz angibt. C. *Struve*, *Grun.* 44 p. 119 wie *Schmidt*; ibid. p. 120 *Schmidt* den verlängerten *Adams*schen Beweis, p. 385 *W. Stammer* (nur den statischen Teil).

Noch vor *Adams*, vielleicht vor *Nagel* ist *Bobillier* zu erwähnen, den *J. Mention*, Nouv. annal. 9 (1850) p. 120 zitiert, *Dupont*, Nouv. annal. 18 (1859) p. 223, auch vor *Beltrami*.

Satz von *Beltrami* (l. c.): Zieht man durch 3 Ecken eines Dreiecks beliebige parallele Geraden und durch dieselben Ecken für die entsprechenden Winkelhalbierenden die gleichgeneigte andere, so schneiden sie sich auf Kreis O. *Elementarer Beweis* von *Beltrami* selbst: *Grun.* 43 p. 482, rechnerisch: *Grunert*, ibid. p. 105; ibid. p. 290

C. Schmidt mit Dreieckskoordinaten (allgemeiner Satz) und p. 291 projektiv (wo der Satz selbstverständlich); ibid. p. 349, ganz elementarer Beweis durch *F. König.*

Evans, Educational times (51) 4101 p. 47; Sind $O'O''O'''$ zu O konjugiert in bezug auf A Zentrum und a Achse etc., so ist

$$OO' : OO'' : OO''' = \cos^2 A : \cos^2 B : \cos^2 C.$$

H. Brocard, Nouv. correspond. 3 p. 96, p. 173, z. B.: Ist D beliebig auf O und schneidet DA Seite a in A' etc., so ist O von $A'B'C'$ der Punkt H von ABC.

E. Cesàro, Nouv. correspond. 6 (1880) p. 360. Wenn man von Punkt M auf O Lote Mx und My auf 2 Seiten fällt, so ist xy gleich der Projektion der dritten Seite auf xy.

J. Neuberg, direkte Ableitung der Gleichung des Umkreises in Dreieckskoordinaten aus der allgemeinen (*Sturm-Steiner*schen) Relation $\frac{de}{ab} + \ldots = \frac{DEF}{ABC}$, wo D etc. Fußpunkte der Lote auf a etc, und d etc. die Lote selbst und der Pol ganz beliebig.

R. Tucker, London mathem. society proceedings 22 (1891) p. 470. A property of the circumcircle.

L. Kiepert, Zeitschrift für Vermessungen 16 (1887) p. 5; Ist P die Potenz des Punktes P in bezug auf den Umkreis, so ist $K = PA \cdot PB \cdot PC : P^2$ Minimum, wenn P das Inzentrum J ist.

Distanzen (s. auch Trigonometrie und *Feuerbach*).

Die Distanzbestimmung der merkwürdigen Punkte ist von *Euler, Fuß, Carnot, L'Huilier* meist rechnerisch gegeben. *Feuerbach* erzielt l. c. wesentliche Vereinfachung durch Einführung von ϱ, dem Radius des dem Höhendreieck eingeschriebenen Kreises.

Sehr einfach geometrisch sind die Ableitungen bei *Adams* (l. c.) (1846).

C. G. Reuschle, Über die Punkte, Transversalen und Kreise der Dreiecke. Stuttgart (1853).

J. Mention, Nouv. annal. 5 p. 403 z. B.: HJ etc. $- d^2 = 4R^2 + 2r^2 - 2P$, wo $2P = a^2 + b^2 + c^2$.

*Euler*sche Relation (Schließungsproblem), elementargeometrisch. *Fuß,* Novi commentarii. Petrop. (10). *Unger, Crelle* 4 p. 395; *Grunert,* Supplement zum *Klügel*; *Jacobi* (*van Swinden*) (1834); *Ph. Grüson, Crelle* 10 p. 275; *Nauck,* Programm Schleusingen (1840), sehr einfach; *F. Strehlke, Grun.* 53 (1871) p. 127; *Hellwig,* Schule der Geometrie t. 2 (1866) p. 69; *Grun.* 19 p. 37 und sehr viele andere, zuletzt noch *Duporcq, Bourget* (1896) p. 12 mittels der Potenz $2Rr$ von J in bezug auf Kreis O, aber nach *Mackay* kommt die Relation und speziell die Bestimmung der Potenz von *J. William Chapple* zu. *Mackay* hat: Edinb. proceedings 1 (1883), gedruckt 1894, p. 109 die Geschichte des

Problems geschrieben und zitiert dort *W. Ch.*, Miscellanea curiosa mathematica (1) 123 (1746).

SO sehr elegant von *Matthew Collins*, geometry miscellaneous (1870); von *E. Barisien*, *Bourget* (1896) durch zweimalige Anwendung des Potenzsatzes als $R^2 - \frac{2}{9} P$. Distanzbestimmung auch bei *G. Dostor*, Nouv. annal. (2) 3 p. 368; *Grun.* 36 No. 18.

James Booth, *Bourget* (1879) p. 298 ΣOJ^2.

Haerins, Nouv. correspond. $JJ_1^2 = 4R(r_1 - r)$; bei *E. Catalan*, Théorèmes et problèmes $JJ_1 \cdot JJ_2 \cdot JJ_3 = 16R^2 r$.

E. Lemoine, Nouv. annal. (2) 9 p. 371.

Entfernung von *H*. Satz von *G. Salmon*, Quarterly journ. 4 p. 152 (siehe *Feuerbach*).

*Nagel*scher Punkt T hat von O die Entfernung $R - 2r$, im Dreieck 13, 14, 15 ist $TJ = 1$, *Harnischmacher*, *Grun.* 42 p. 90.

Cayley, Quarterly journ. 5 p. 381 (mit Determinanten).

Heute sind die Distanzbestimmungen sehr gebräuchliche Schulaufgaben geworden.

Eine allgemeine Formel gibt *Clém. Thiry*, Bulletin Académie de Belgique (3) 21 (1891) p. 471 gestützt auf den *Stewart*schen Satz: Ist P ein Punkt, sind AP etc. Ecktransversalen und $K_n A$ etc. solche, welche die Gegenseiten im Verhältnis der n^{ten} Potenzen der anliegenden schneiden, so ist $PK_n = \Sigma a^n \frac{PA^2}{\Sigma_a^n} - E_n$, wo E_n eine Konstante unabhängig von P.

Dreiecks-Schwerpunkt.

Bei den Engländern jetzt *Centroid**), der fundamentale Satz sowie der Name (*κέντρον βαρῶν*) bei *Archimedes.*

Weil sein Abstand von einer beliebigen Geraden (mit Rücksicht auf die Zeichen) der Durchschnitt der Abstandssumme der Ecken ist, hat ihn *Carnot*, Géométrie de position p. 269 Zentrum der mittleren Entfernungen genannt. Als Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ist er lange vor *Steiner* (1833) schon von *F. J. Servois* (Solutions de problèmes etc. Nouvelles annales 12) aufgefaßt, der p. 17 hervorhebt, daß S die Grenze ist, der sich die Schar der eingeschriebenen Mittendreiecke nähert (vgl. Schwerpunkt). Daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Ecken ein Minimum, ist eine Folge des allgemeinen Satzes über den Schwerpunkt (s. d.), wonach

$$\Sigma PA_k^2 = \Sigma SA_k^2 + n \cdot PS^2.$$

Der Satz selbst ist bei *Fagnano* (l. c.) mit Differentialrechnung bewiesen.

---

*) Nach *MacBay* stammt das Wort von *T. S. Davies* in the Mathematician I p. 58.

Die Punkte, welche sich in bezug auf S invers ähnlich entsprechen, nennt *E. Vigarié*, Mathesis 7 (1887) p. 6, 57, etc. komplementär bezw. antikomplementär. Die Sätze sind im wesentlichen schon bei *Nagel*, Untersuchungen (1836), und bei *Reuschle*, *Schlömilch* 11 (1866). *Reuschle* nennt sie *Nagel*sche Punktepaare, sie liegen mit S in einer Geraden, und die Abstände verhalten sich wie 1 : 2. Zu ihnen gehören u. a. O und H; N und O; *Nagel*scher Punkt T und J.

Aus der Formel folgt ohne weiteres, daß Punkte gleicher Entfernung von S gleiche Summe PA_k^2 besitzen (fürs Dreieck *C. F. A. Jacobi*, De trianguli proprietat. (1825) p. 7).

Der Satz von *Pappus*, daß auch die Dreiecke, welche man erhält, indem man die Seiten in gleichmäßigem Umgang im Verhältnis der Seiten teilt, S zum Schwerpunkt haben (und damit die ganze Kette), ist geometrisch von *Fuhrmann* bewiesen (synthetische Beweise planimetrischer Sätze (1890)) (s. Schwerpunkt).

Der Satz von *Maclaurin* für die Transversalen durch S, welche die Seiten in D, E und F schneiden, (algebraische Summe) $\sum \frac{1}{SD} = 0$, ist von *E. v. Hunyadi*, *Schlömilch* 7 (1862) p. 268 bewiesen.

Daß der größeren Seite die kleinere Mediane zukommt, ist geometrisch z. B. bei *Catalan* et *La Frémoire*, théorèmes et problèmes, bewiesen.

Für die Winkel $\alpha . \beta, \gamma$ der Medianen (Schwerlinien) mit den Seiten fand *Fasbender*, *Grun.* 49 (1869):

$$\Sigma \cot \alpha = 0; \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma,$$

Beweis von *Hackel*, ibid. p. 346; ders. *Grun.* 52 (1870) p. 62; Winkel, welche die Medianen unter sich bilden (s. *Bretschneider*'s Verallgemeinerung, *Grun.* 50 p. 103); Kreis über AA' und BB' hat h_c zur Radikalachse. *Rindi*, Educational times 60 (1894) Nr. 12036.

Die zahlreichen Relationen zwischen den Seiten und Medianen finden sich in den Lehrbüchern und Aufgabensammlungen besonders der Trigonometrie zerstreut; sie sind zusammengestellt: *Battaglini* 1 (1863) p. 126 und bei *Mackay* l. c.

Mit S im Zusammenhange steht der Schnittpunkt K der Symmedianen, der sogenannte Punkt von *Lemoine* oder *Grebe*, der mit ebenso großem Recht Punkt von *Adams* heißen könnte, da sich bei *Adams*, Die merkwürdigen Eigenschaften etc. (1846), alle seine Eigenschaften entwickelt finden bis auf den von *Grebe*, *Grun.* 9 (1847) gegebenen Satz, daß für K die Summe der Quadrate der Abstände von den Seiten ein Minimum ist, den *Jacobi*, Die Entfernungsörter des geradlinigen Dreiecks (1851),

ebenfalls beweist, sowie *Reuschle*, Programm Tübingen (1853) § 8. Sehr wichtig für K und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks überhaupt sind die Arbeiten von *Franz Wetzig*, *Crelle* 62 (1863) p. 346 und erweitert: *Schlömilch* 12 (1869) p. 281. Vgl. auch *K. H. Lieber*, Über die Gegenmittellinien und den *Grebe*schen Punkt, Stettin 1886, und *Mackay*, Edinb. M. S, proceed. 11 (1892--93); siehe auch *J. Neuberg*, Mathesis 1 (1881) p. 153, 173, 185; *Maurice d'Ocagne*, Nouv. annal. (3) 4 (1885) p. 360.

Ich füge hinzu, daß, wenn man den *Brocard*schen Punkt *Crelle* absprechen will, die Priorität dem Danziger Gymnasiallehrer *H. Hoffmann* zukommt, der *Grun.* 9 (1847) p. 280 „In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu zeichnen, dessen Seiten mit den homologen des ersten einen gegebenen Winkel φ bilden (Fall 2)", *beide Brocard*schen Punkte und die wesentlichen Eigenschaften samt $\cot x = \sum \cot A$ und

$$2 \sin^3 x = \sin(A - x) \sin(B - x) \sin(C - x)$$

fand, und daß auch schon *Reuschle* (l. c.) (1853) § 4 lange vor *Marqfroy*, Nouv. annal. (2) 10 (1871) p. 142 dieselbe Gleichung hat und zeigt, daß sie mit der ersten gleichwertig ist. Übrigens hat *C. F. A. Jacobi* in der mehrfach erwähnten Dissertation: De trianguli rectilinei proprietatibus, Leipzig (1825) den *Brocard*schen Punkt schon vor *Hoffmann* behandelt.

Über den Schwerpunkt des Umfangs, den Mittelpunkt des dem Seitenmittendreiecke eingeschriebenen Kreises vgl. *Nawrath*, Über das Mittendreieck, Programm (1890) Nr. 190.

Ich erwähne, obwohl methodisch nicht elementar, die Abhandlung von *Theodor Meyer* (Saarbrücken), *Grun.* (1890) p. 507, wo sich u. a. der Satz findet: Die *Euler*sche Gerade jedes Dreiecks, welche einen Winkel von 60^0 (120^0) enthält, ist normal (parallel) zu der Halbierungslinie dieses Winkels.

18. Stewart und Simson. Unter den „general theorems" (vgl. reguläre Polygone) findet sich der Satz: „Wenn ABC in gerader Linie und O ein beliebiger Punkt ist, so ist

$$OA^2 \cdot BC + OB^2 \cdot CA + OC^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0"$$

(*Thiry*) ohne Beweis (1746); er wurde 1751 von *Thom. Simpson* bewiesen, 1780 von *Euler*, Acta Petrop. 1 p. 92—93, 1803 von *Carnot*; *Chasles*, Aperçu historique zeigt seine Wichtigkeit und *Clément Thiry* schrieb 1891 eine eigene Broschüre: Application du théorème de *Steward*.

A. Mackay, Mathesis 13 (1893) p. 63 gab die Literatur und vindizierte den Satz *Robert Simson* „loci plani 1749", der ihn vor 1741 seinem Schüler *Stewart* mitteilte. Vgl. auch *A. Mackay*, „On Mathematics", *Stewart*'s theorem, Edinb. mathem. society proceedings 10 (1892) p. 90.

Adams l. c. sub Nr. 17.

R. Blindow, Grunert 32 p. 124; *Bretschneider, Grunert* 42 (1869) p. 12.

Cl. Thiry, (1887) Sur le théorème de *Stewart* 16 p. (Brux.); id. Mathesis (1888) p. 93 sehr allgemeiner Satz, von dem *Simart*, Mathesis 18 (1898) p. 17 den Spezialfall $AA'^2 \cdot BC + \cdots + AB \cdot BC \cdot CA = 0$ (wo AA' etc. Tangenten an denselben Kreis) gibt; *Cl. Thiry*, Mathesis (1889) p. 95, ders. Académie de Belgique (3) 21 (1891).

B. Niewenglowski, Nouvelles annales (3) 6 (1887) wendet *Stewart* auf die *Apollonis*che Aufgabe: Kreis durch 2 Punkte etc. an; sehr einfache Konstruktion mittels einer Relation zwischen den Potenzen dreier Punkte einer Geraden (*Simart*!); dieselbe Aufgabe in derselben Weise *Guimarães*, Edinb. mathem. society proceed. 16 (1897) p. 47, der im „Progreso" (Zaragossa) (1892) p. 69, 94, 124 den *Stewart*schen Satz bearbeitet hatte.

W. S. Spacsinski Bote 128 (1891) russisch (*Ptolemäos*).

*Stewart*scher Satz auf der Kugel aus einem allgemeineren von *Möbius*, *Crelle* 24 (1848), Gesammelte Werke 1 p. 577 Note.

Den *Stewart*schen Satz habe ich in einem Lehrbuch für die Schule zuerst bei *Catalan* und *La Frémoire* getroffen.

*Stewart*scher Satz mittels Inversion zum Beweis des *Ptolemäos* benutzt (siehe *Ptolemäos* und Inversion).

Mittels des *Ptolemäos* wird eine Ausdehnung des *Stewart*schen Satzes auf das Sehnensechseck Nouv. ann. 17 (1858) p. 263 unter anderen von *A. Borgis* bewiesen.

*Simson*sche oder *Wallace*sche Gerade ($= s$).

J. Mackay hat: Proceedings of the Edinburgh mathematical society 9 (1890—91) p. 83 angegeben, daß der Satz: Die Fußpunkte der 3 Lote von einem beliebigen Punkt P des Umkreises auf die drei Seiten des Dreiecks liegen in *einer* Geraden, nicht bei *Robert Simson* (wie *Servois*, *Gergonne* 4 p. 250 sagt), sondern bei *Wallace*, *Leybourne*'s mathem. repository (old series) 2 1798 p. 111 vorkomme.

Es sind hauptsächlich 4 Sätze, welche oft wiederkehren:

1. Wenn P der „Pol" auf dem Umkreis und H Orthozentrum, so wird HP von der s zu P halbiert.

2. Auch die schrägen Projektionen des Punktes P auf die Seiten liegen in *einer* Geraden „s'".

3. Wenn P ein Punkt eines mit dem Umkreis konzentrischen Kreises ist, so ist das Dreieck aus den drei Projektionen konstanten Inhalts.

4. Die beiden s zweier diametralen Pole stehen aufeinander senk-

recht und schneiden sich auf dem *Feuerbach*schen Kreis; allgemein ist der Winkel der s dem Peripheriewinkel der Pole gleich.

Satz 1: *J. Steiner*, *Gerg.* 18 Quadrilatère complet *Crelle*; 53 (1856) p. 231 im Zusammenhang mit der dreispitzigen Hypozykloide; vergl. aber *Schläfli*'s Anteil im Briefwechsel zwischen *J. Steiner* und *L. Schläfli*, hrsg. v. *Graf*, p. 208.

W. F. Walker, Quarterly journal 8 (1867) p. 47 elementargeometrisch; *W. H. Besant*, Quart. journ. 11 (1878) p. 41.

Retsin, Nouvelles annales (2) 8 (1869) p. 530 aufs Viereck übertragen.

E. Vigarié, *Bourget* 12 (1888) p. 253; Ort des Halbierungspunktes ist der *Feuerbach*sche Kreis (*Steiner*).

Satz 2: *Poncelet*, Nr. 468 des Traité (1822) (Brennpunktseigenschaften der Parabel).

Jak. Steiner, *Gerg.* 19 (1828) p. 37; Théorèmes relatifs aux sections coniques; Gesammelte Werke 1 p. 197.

M. Chasles, Géométrie supérieure (1852) p. 281. Der Satz: Die 4 Umkreise der 4 Dreiecke eines vollständigen Vierseits schneiden sich in *einem* Punkt, Umkehrung von Satz 2.

Boymann, *Grunert* 13 (48) p. 364, ganz direkter Beweis, Umkehrung etc.

P. A. MacMahon, *Messenger* 12 (1883) p. 138; Gerade, die mit den Loten gleiche Winkel δ nach derselben Seite hin bilden; wenn δ beweglich und P fest, so umhüllen die s' eine Parabel, wie schon *Steiner*, *Gerg.* 19 (1828) p. 37; wenn δ fest und P auf dem Umkreis beweglich, so eine dreispitzige Hypozykloide (*Steiner*sche Kurve).

H. Schotten, *Schlömilch* 34 (1889) p. 311.

N. Quint, Nieuw archief (2) 3 (1897) p. 163 The general *Wallace* line.

Satz 3: *Gergonne* als Frage: *Gergonne* 14 (1823—24) p. 28 *Querret*, ibid. p. 280; Inhaltsformel:

$K = \frac{T}{4R^2}(R^2 - r^2)$; $T = \Delta$. Äquivalenz wenn

$r^2 + r_1^2 = 2R^2$ (analytisch); Inhalt negativ, wenn:

$r_1 > R$. *Sturm* ibid. p. 286 id.

Th. Clausen, *Crelle* 3 p. 196; $4i = (1 \mp K^2)J$, wo

$K = R : r$ und J Inhalt des Urdreiecks.

J. Alison (s. u.) gibt an: Analytische Lösung in the Mathematician Vol. 1 (1843) und geometrische Beweise von *Davis*, ibid. 2 (1847) p. 37, wo die Lote durch unter dem Winkel φ gegen die Seiten geneigte Geraden ersetzt sind und dann:

$i' = i : \sin^2\varphi$. *E. Cesàro*, Nouv. correspondance 6 (1880) p. 161.

Satz 3 ist von *L'Huilier* (s. Polygon) auf reguläre Polygone und von ***J. Steiner*** auf beliebige Polygone erweitert: *Crelle* 1 (1826) p. 38 und bewiesen: *Crelle* 2 p. 265. Fällt man aus einem in der Ebene eines gegebenen Vielecks beliebig angenommenen Punkte P Lote auf die Seite desselben, so ist, wenn der Flächeninhalt des Vielecks, dessen Scheitel in den Fußpunkten der Lote liegen, konstant bleiben soll, der Ort des Punktes P die Peripherie eines bestimmten Kreises, der

Mittelpunkt dieses Kreises ist ein bestimmter fester Punkt, d. h. er bleibt derselbe, wenn auch der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks kleiner oder größer angenommen wird, nämlich er ist der Mittelpunkt (Schwerpunkt) von Kräften, die in paralleler Richtung auf die Ecken des gegebenen Vielecks wirken und sich verhalten wie die Summe der respektive doppelten Winkel des Vielecks.

Besonders Beweis 2 ganz elementar mit Hilfe des Satzes von *Meier Hirsch*, Aufgaben 2 (1807) p. 338 (s. Schwerpunkt). Der *Steiner*sche Satz und die Erweiterung auf schräge Projektion ist schon bei *Sturm* (l. c.) am Schluß angedeutet.

Satz 3: Mit Erweiterung von *Steiner* und erweitert auf beliebigen Punkt im Raum, wo dann der Ort des Fußpunktpolygons konstanten Inhalts ein Rotationszylinder ist, bei *Combette*, Revue des sociétés savantes 5 (1870) p. 203—233 (Mitteilung von *Mackay*).

Satz 4: *Jakob Steiner*, *Crelle* 53 p. 237 (s. Sammlung *Schubert* Nr. 8 Abschnitt 13). *W. H. Besant*, Quarterly journal 10 (1870) p. 110; *Tucker*, Educat. times 9 Nr. 2489; *E. Lemoine* (Mathesis und *Bourget*); *Candido*, Nouv. annales (1899) p. 173.

F. J. Servois, *Gerg.* 4 p. 250 benutzt die *s*, um eine Gerade über ein Hindernis zu verlängern, er beweist analytisch den identischen Satz: Wenn man über 3 Sehnen eines Kreises von demselben Punkte Kreise beschreibt, so liegen die freien Schnittpunkte in *einer* Geraden.

J. B. Durrande, *Gerg.* 7 p. 253 beweist *s* durch *Menelaos* (statt durch Kreisviereck) und zeigt, daß sie beim Tetraeder keine Analogie hat (s. ibid. 4 p. 320.)

Heinen, *Crelle* 3 p. 287; Konstruktion des Pols zu gegebener Richtung der *s*, dito *V. Retali* im Progreso matematico 2 (*A. Reyes y Prosper* 1892).

Die Sätze über die s am vollständigen Vierseit, z. B. die s des Vierseits steht auf seiner *Gauß*schen Geraden senkrecht (*Steiner*, Beweis z. B. *Alison* (s. u.)); siehe bei Viereck desgleichen die Sätze über die s des Kreisvierecks.

N. M. Ferrers, Quarterly journ. 2 (1858) p. 120, Dreieckskonstruktion; Quart. journ. 5 noch erweitert von *W. Walton*, Das sphärische Problem daselbst p. 328.

E. Catalan, Théorèmes et problèmes. Die *s* ist parallel den drei Sehnen, welche die Ecken mit den Punkten verbinden, in denen die zugehörigen Lote den Umkreis treffen.

N. M. Ferrers, Quart. journ. 8 (1867) p. 209; Zusammenhang mit der *Steiner*schen Kurve, vgl. dazu Sammlung *Schubert* Nr. 8.

E. Lemoine, Nouv. annal. (2) 8 (1869) p. 317; die 4 *s* eines Kreisvierecks schneiden sich in *einem* Punkt (s. Kreisviereck).

G. de Longchamps, Nouv. correspond. (1877); Die 4 Projektionen eines Punktes O des Umkreises auf die 4 Simsonlinien eines Kreisvierecks liegen in *einer* Geraden, *der s des Vierecks*, ein 6. Punkt des Umkreises gibt durch seine Projektion auf die 5 *s* der Vierecke die *s des Fünfecks* usf., reproduziert von *Langley* als Aufgabe der Educat. times und gelöst 51 Nr. 9917; 52 Nr. 12 212.

Julliard, *Bourget* (1878) p. 69 ($l_1 = l_2 + l_3$); ibid. (1885) p. 8 u. 27 *Maurice d'Ocagne*.

N. Goffard, Nouv. annal. (2) 20 (1881) p. 523; Die Projektion von BC auf

die s ist gleich der zugehörigen Fußpunktenstrecke auf s. Beweis von *E. Cesàro* Mathesis 5 (1885) p. 128; ferner *Verniory*, Mathesis 6 p. 32.

J. Alison, Proceedings of the Edinb. mathem. society (1885) p. 77; sehr reich haltige Zusammenstellung von Eigenschaften der s.

A. Strnad, *Časopis* 15 (1886) p. 114; 13 Sätze, darunter: Der Winkel der s ist gleich dem Peripheriewinkel der Pole (Satz 4).

E. van Aubel, Mathesis 5 (85) p. 58 (Aufg. 99); hübsche Sätze über die s. Die s des Dreiecks ABC in bezug auf die Pole A'' etc., in denen die Höhen den Umkreis schneiden, bilden ein Dreieck $A'''B'''C'''$, welches denselben Schwerpunkt wie $A'B'C'$ (Höhendreieck) hat etc. Die Geraden $A''A'''$ etc. sind konpunktisch; vgl. dazu *van Aubel*, Mathesis 1 p. 163.

Sollertinski, Mathesis XII p. 118.

N. Quint, Nieuw archief. (2) 3 (1897) p. 163; The general *Wallace* line of an inscribed polygon. Der Satz von *Longchamps* bleibt bestehen, auch wenn die Lote vom Pol um denselben Winkel nach derselben Seite gedreht werden; id. bid. 3 p. 180; On an extension of the *Wallace* problem. Dazu:

J. E. A. Steggall, Edinb. M. S. Proceedings p. 122 (1896 ; die *Longchamps*schen s eines regulären Polygons umhüllen, wenn der Pol den Kreis durchläuft, eine n-spitzige Hypozykloide, und wenn der Pol fest und das Polygon sich auf den Kreis wälzt, gehen sie durch einen festen Punkt.

Déprez, *Educat. times* 69 (1898) p. 27; vgl. 66 p. 31, 66 p. 48, 49 Nr. 13653 und 13684; *Watson*, ABC; A', B', C' 3 andere Punkte auf O; ist

$$\text{arc } AA' + \text{arc } BB' + \text{arc } CC' = 2n\pi,$$

so schneiden sich die $3s$ in *einem* Punkt; ist die Summe $= (2n + 1)\pi$, so ist der *Feuerbach* des von den s gebildeten Dreiecks identisch mit dem von ABC.

A. Droz-Farny, ibid. 71 (1899) p. 106 Nr. 14075; S Berührungspunkt von J und *Feuerbach*, die s von S mit Rücksicht auf das Kontaktdreieck ist parallel der *Euler*schen Geraden dieses Dreiecks. (OJ geht durch das Orthozentrum desselben.) *Hillyer* (1900) p. 91 Nr. 14190; P auf O, a Orthozentrum von PBC, alsdann ist s von P auch s von a in Hinsicht auf PBC etc. 67 (1897) 13311 *Schwatt*.

Mackay setzt die Entdeckung der s (l. c.) auf 1799 oder 1800 aus dem Parabeltangentendreieck wie *Poncelet*; nach einer historischen Note von *Muir*, Edinb. M. S. proceedings 1 Abt. 3 p. 104 hat *Mackay* den Satz bisher nicht bei *Simson* gefunden. Immerhin bleibt es auffällig, daß *Servois* 1814 einen Satz aus 1800 *Simson* zugeschrieben hat

Literarische Notizen finden sich auch:

Chasles, Aperçu historique (2. Aufl. Nr. 395).

Ich füge hinzu:

G. Biasi, Sopra una estensione del teorema di *Wallace*. Mat. pure et applic. 1 (1902) p. 264 und *G. Biasi*, Di due nuove forme del teorema di *Wallace* nelle sue estensioni. Period. 17 (1902).

L. Ripert, Sur une extension élém. du théorème de *Wallacc*. Mat. pure et applic. 2 (1902) p. 30.

19. Malfatti. (Das *Malfatti*sche Problem = *M.*) *Gergonne* und *Lavernède* behandeln selbständig die Aufgabe: In ein Dreieck drei Kreise

einzuschreiben, deren jeder die beiden anderen und je zwei Dreiecksseiten berührt, sie gelangen durch mühsame Rechnung: *Gerg.* 1 p. 345 zu Ausdrücken für den Radius, die nur der Möglichkeit nach konstruierbar; sie erhalten von *Bidone* die Mitteilung, daß bereits *G. F. S. Malfatti*, Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze, *Modena* t. 10 (1) (1803) p. 235; Memoria su un problema stereotomico, das Problem gelöst habe. *Malfatti* gibt dort die Gleichung, ohne Zwischenrechnung ihre Auflösung und gründet auf den Ausdruck für die Tangenten von den Ecken die Konstruktion, welche zum Zeichnen bedeutend einfacher als die *Steiner*sche ist, und die von *Mertens* noch wesentlich vereinfacht wurde. *Gerg.* 2 p. 60 zeigen *Gergonne* und *Lavernède*, daß die Formeln von *Malfatti* ihren Gleichungen genügen; die Ableitung gelingt ihnen nicht. *Tédénat*, ibid. p. 165 gibt die Formel $r = \frac{a' a''}{2a}$, wo a Stück der Winkelhalbierenden zwischen Inkreis und dem Schnitt durch den Kreis um A mit der Tangente an den Inkreis $(p - a)$ und r der Radius des zu A gehörigen *M.*-Kreises ist.

Gerg. 10 p. 289 gibt „*Lechmutz*", das ist der bekannte Berliner Mathematiker *Lehmus*, trigonometrisch mit etwas umständlicher Rechnung die einfache Konstruktion auf Grund der Formeln von *Tédénat*.

E. Catalan kürzt Nouvelles annales 5 (1846) p. 60 die Rechnung erheblich. Die Lösung von *Lehmus* ist auch im Anhang zum 2. Band seines Lehrbuches der Geometrie, Berlin (1820), auch im wesentlichen in *Crelle*'s Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen (1821), wo *Gergonne* und *Tédénat* reproduziert sind; auch *Grunert* (*Klügel*, Supplement, 2. Abt., Artikel: Anwendung der „Analysis") gibt, etwas eleganter, diese Lösung, welche unbewußt von *H. Scheffler*, *Grun.* 16 (1851) p. 423, reproduziert wird.

Jakob Steiner gibt dann *Crelle* 1 (1826) p. 178 ohne Beweis, der nur durch den Zusammenhang mit den Kreispotenzsätzen angedeutet wird, seine Konstruktion, welche zwar mühsamer als die von *Malfatti* ist, doch sehr merkwürdige Sätze über die Kreise enthält. Er löst die Aufgabe auch für die Kugelfläche und verallgemeinert sie auf 3 Kreise statt der 3 geraden Seiten und auf beliebige F_2, darin 3 Kurven C_2; es sollen 3 andere C_2' gefunden werden, welche einander berühren und deren jede je zwei der gegebenen C_2 berührt p. 183, und stellt die Aufgabe für das Tetraeder p. 184 richtig.

A. R. Zornow (Königsberg) gibt *Crelle* 10 (1833) p. 300 einfach, aber ohne Zusammenhang mit den Kreisbüschelsätzen, den Beweis von *Steiner*'s Lösung durch Rechnung.

J. Plücker, *Crelle* 11 p. 117; Geometrische Aphorismen. Mittels des Satzes: Die 4 Tangenten von 2 Punkten der Chordale bestimmen ein Tangentenviereck, die *Steiner*sche Konstruktion mit zwei Varianten bewiesen; die Verallgemeinerung ist falsch, wie *Mertens* (s. u.) gezeigt hat.

C. Adams, Das *M.* neu gelöst, Winterthur 1846. 1. *Malfatti*'s Lösung. 2. *Gergonne* und *Lavernède*. 3. Umformung von *Gergonne*, er gelangt zu sehr ähnlichen Ausdrücken wie *Malfatti*. 4. Die *Steiner*sche Konstruktion; er akzeptiert die Vermutung *Anger*'s (Danzig 1841) über den Ursprung derselben aus der projektiven Beziehung vom gleichseitigen Dreieck aus, die vermutlich falsch ist. 5. Beweis der *Steiner*schen Konstruktion; Abschn. 3 p. 20 neue Variante derselben, welche die Formeln *Malfatti*'s gibt; wiederholt 1848 Programm der Gewerbeschule zu Winterthur, Bericht: Nouv. annal. 8 p. 62.

Quidde, Programm Herford (1849); Beweis der *Steiner*schen Konstruktion.

A. Cayley, Analytical researches etc. (1852), Philosophical transactions 1852 p. 258; zu drei auf einer F^2 gegebenen ebenen Kurven drei andere etc. algebraisch gelöst.

K. H. Schellbach, *Crelle* 45 p. 91 und p. 187 geradlinig und sphärisch; schöne algebraische Behandlung und hübsche Konstruktion aber ohne Analyse (Elliptische Funktionen), auch ausführlich: Mathematische Aufgaben p. 100: auch in *Karl Schwering*'s 100 Aufgaben (1891), wo auf *Gudermann*, *Crelle* 18 § 1 und 2 verwiesen ist.

H. Hart, Quarterly journ. 1 (1857) p. 219; sehr einfacher Beweis der *Steiner*schen Lösung durch die Kreisbüschelsätze; ebendort p. 222 reproduziert *Cayley* die Lösung *Schellbach*'s. Mit *Hart*'s Beweis steht die *Malfatti*sche Aufgabe in *Catalan*'s Théorèmes et problèmes.

A. Clebsch, *Crelle* 53 p. 292. Die *Schellbach*sche Lösung auf 3 kleine Kreise einer Kugel erweitert (elliptische Funktionen).

H. Fox Talbot, Edinb. transactions 24 (1864—69) p. 121; Recent researches on mathematics, auch Geschichte (*Lechmutz*). *Plücker*'s Konstr. rein synthetisch bewiesen.

W. Binder, Das *M.* (1868) Programm Schönthal, Beweis der *Steiner*schen Konstruktion weit besser als *Quidde*, *Grun.* 15 (1850) p. 197, besonders auch Literatur.

F. Zorer, Programm Ellwangen (1870); Trigonometrische Auflösung und mehrere Konstruktionen.

Arn. Wittstein, Programm Erlangen (1871), Nördlingen (1878); Geschichte des *Malfatti*schen Problems.

Ergänzung dazu: *F. Hall*, Programm 384 Watterscheid (1898).

Mendthal, *Grun.* 55 (1873) p. 211; Beweis der *Steiner*schen Konstruktion mit *Plücker*schen Sätzen aus *Crelle* 11.

G. Affolter, *Clebsch* Annalen 6 (1873) p. 597, auch für sphärisches Dreieck und Kugeln im Raum nebst Erweiterung.

Fr. Mertens, *Crelle* 76 (1873) p. 92 zeigt, daß *Malfatti*'s Formeln auch für das sphärische Dreieck gelten; in der großen Arbeit *Wiener Denkschr.* 36 (1875)

p. 197 beweist er die *Steiner*sche Konstruktion, zeigt die Falschheit der *Plücker*schen Lösung des verallgemeinerten *M*. und gibt die richtige Konstruktion. Prag. Ber. 1894, Die *Malfatti-Steiner*sche Aufgabe, nähert die analytische Lösung der synthetischen.

P. A. Simons, Bulletin de l'académie de Belgique (2) 38 (1874) p. 88; literarische Analyse, nicht frei von Irrtümern; er leitet aus den Formeln *Gergonne*'s die Formeln *Malfatti*'s her; ibid. p. 480 vereinfacht *Catalan* seine Lösung oder besser die von *Lehmus* noch mehr als 1846.

H. Schröter, Crelle 77 (1874) p. 230; er zeigt den Zusammenhang mit den Kreisbüschelsätzen *Steiner*'s. Literatur.

G. Biadego, Catalogo (32 Arbeiten): Bulletino Boncompagni 20 (1876) p. 388.

Julius Petersen, Methoden und Theorien (1879) p. 102 und *Crelle* 82 (1880) p. 127; die *Steiner*sche Lösung mit den Kreissätzen.

W. Godt, Crelle 84 (1878) p. 259; Über die *Steiner*sche Verallgemeinerung des *M*. (nicht eigentlich elementar).

M. Baker, Washington Bullet. 2 (1880) p. 113; The history of *M*. problem (mir nicht zugänglich gewesen).

Franz Mertens, Schlömilch 21 (1876) p. 297, sehr einfache Ableitung der Formeln *Malfatti*'s.

J. Sachs, Über die Aufgaben des *M*., ihre Erweiterung und Lösung, sehr ausführliche historisch-bibliographische Tabelle; analytisch geometrische Behandlung, aus welcher sich 128 Lösungen ergeben. Sichtung durch den Verfasser Programm Freiburg in Breisgau (1885).

Nakonazny, Programm Stanislawo (polnisch); historisch (1885).

C. Neumann, Leipziger Berichte 41 (1889) p. 22—30; Über das *M*., *Neum*. entfernt Ähnlichkeit aus *Schröter*'s Beweis von 1874, und nur durch reziproke Radien beweist er, daß die drei zweiten gemeinsamen inneren Tangenten die Tangenten an die *Malfatti*schen Kreise sind.

E. Lebon, Rendiconti Palermo 3 (1889) p. 120; Solution du problème de *Malfatti*. Geschichte (sonderbare Kritik der *Steiner*schen Lösung, „*Lechmuts*"), sehr einfache Ableitung der Segmente *Malfatti*'s, behandelt auch den Fall, wo jeder Kreis die dritte Seite schneidet, und die Fälle, in denen zwei Kreise sich von außen berühren und den dritten einschließen und umschließen.

C. Davids, Grun. (2) 13 (1895) p. 10. 13 Auflösungen; kritisiert und verbessert zuerst die von *Crelle*; erst 6 Lösungen und dann: *Grun*. (2) 14 p. 276 die anderen 7; zuletzt eigener sehr langwieriger Beweis der *Steiner*schen Lösung.

J. Derousseau, Liége mémoire (2) 18 (1895) Nr. 1; Geschichte, aber nicht vollständig, und eigene Vervollständigung. Bei ihm noch angeführt, *Jakob Bernoulli*, Oeuvres complètes (1747) für den Fall des gleichseitigen Dreiecks; *A. Cayley*, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 4, p. 270; *Desbove*'s Application de trigonométrie (1872), drei Lösungsmethoden; *Pelletereau* (1888), neue Lösung, Assoc. Franç. Av. Sc.

G. Bellacchi, Periodico di matematica 10 (1895) p. 25 ff., 11 (1896) p. 56 trigonometrisch.

A. Pampuch, (1897) Das verallgemeinerte *M*. nebst 5 etc., Konstruktion durch Inversion; (1900) Das verallgemeinerte *M*. (Geometrie der Lage), *beides: Programm Straßburg i. Els.* (dito 1902).

E. N. Barisien, Mathesis (1902) p. 92; besonderer Fall, in dem eine Ecke im Unendlichen mittels des Satzes: Der Radius des gegebenen Kreises ist gleich der gemeinsamen Tangente der beiden kleinen Kreise; sehr einfache Lösung.

Derselbe, Généralisation du problème de *M.* Nouv. ann. (4) 2 (1902) p. 411, im Anschluß an *A. Desboves*, Questions de Trigonométrie (s. d.). Er fand statt der 32 Lösungen nur 20.

Alle 32 Lösungen leitet algebraisch, elementar und aus einem *einzigen Gleichungssystem* ab, und mittels nur *einer* Zwischenformel: ***A. Pampuch,*** *Grun.* Archiv (3) 8 (1904) p. 36. Die 32 Lösungen des *Malfatti*schen Problems.

20. Vermischte Dreieckssätze.

Querret, Gergonne 15 p. 84.

Wenn $AP \perp AC$, $BQ \perp CB$ und $AP : BQ = AC : BC$, und C' Schnittpunkt von AQ und BP ist, soist $CC' \perp AB$ (Hilfslinien zum

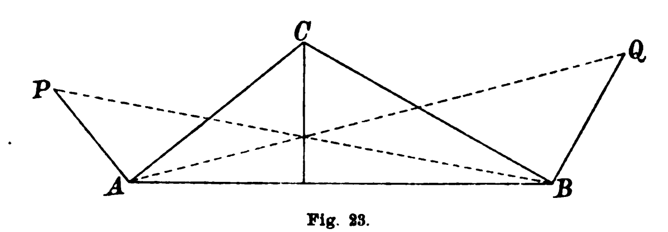


Fig. 23.

Pythagoras). Ibid. *Gerg.* p. 188: Wenn AP beliebig lang und parallel CB, desgl. $BQ \parallel AC$ und PD und $QD \parallel AC$ und BC, so geht DE durch den Schnitt von PB und AQ. (Fig. 23.)

C. F. A. Jacobi, Entfernungsörter geradliniger Dreiecke (1851) (algebraische Summe der Entfernungen von den 3 Seiten konstant), Ort: gerade Linie; *W. Schell, Grunert* 18 (1852) p. 79 (Gerade und Ebenen); elementar analytisch (analytisch trivial); dazu *Timmermans* Nouvelles annales 18 p. 217, der schon in *Gerg. 18* (*1828* p. 177 die Entf. für Gerade und Ebene behandelt hat.

J. A. Grunert, Grun. 17 p. 361 analytisch. *H. Emsmann, Grun.* 46 (1866) p. 121, p. 147; Die *Jacobi*schen Entfernungsörter zu Dreieckskonstruktionen benutzt.

A. Dietrich, Programm Greifenberg i. Pommern (1869). *Jacobi*sche Entfernungsörter; 4 Nulllinien, schöne Konstruktionen und neue Sätze.

Gleichseitige Dreiecke über den Seiten (*Fermat*schen Punkt F nennt man den Schnitt ihrer Umkreise). *D. Ch. L. Lehmus, Crelle* 50 (1855) p. 266; Minimum der Gesamtentfernungen etc. *Grunert, Grun.* 48 p. 37; Spitzen von den Ecken gleich weit entfernt um

$$2B\sqrt{1 + \cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\sqrt{3}}.$$

H. Brocard, Nouv. correspondance 3 (1876); auf den Seiten von ABC nach innen gleichseitige Dreiecke, so sind aA, bB, cC gleich lang und schneiden sich im Schnittpunkt der 3 Umkreise der gleichseitigen Dreiecke.

E. van Aubel, Nouv. corresp. 6 (1880) p. 363. Die Zentren der gleichseitigen Dreiecke nach außen oder nach innen sind die Ecken eines neuen gleichseitigen Dreiecks. Errichtet man auf den Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist A Mitte von $A_1 A_{11}$ etc., ders. Mathesis 9 (1889) p. 188, aber s. *Holmes, Messenger* (1878)

p. 56; Innen- und Außenseiten t und t', so ist $3(t^2 + t'^2) = a^2 + b^2 + c^2$; Verallgemeinerung ibid. p. 57 von *Glaisher*.

E. Engelbrecht, Grun. 60 (1877) p. 447; beliebige ähnliche Dreiecke über den Seiten, analoger Satz.

J. Neuberg, Nouv. corresp. 4 (1878) p. 142; hübsche Sätze über ein beliebiges Dreieck und die Zentren der Quadrate über den Seiten $\frac{\Delta'}{\Delta} = 1 + \frac{1}{2}\cot\omega$, wo ω *Brocard*(*Hoffmann*)scher Winkel, aber schon vorher *Terquem,* Nouv. annal. 8 (1849) p. 47 aus Programme de l'université de Dublin (1848) (s. *Grun.* 22 p. 480). Dahin gehört auch der *Grebe*sche Punkt; *E. Grebe, Grun.* 9 p. 250; das geradlinige Dreieck in bezug auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkt seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann.

*C. Adams, Nagel*sche Punkte, Untersuchung über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise. Leipzig (1836).

C. G. Reuschle, Programm (1853); Über die Punkte, Transversalen und Kreise des Dreiecks.

J. B. Féaux, Vollständige Theorie des ebenen Dreiecks. Auf eigentümliche Weise dargestellt. Münster (1846).

H. Hoffmann (Gymnasiallehrer zu Danzig): *Grun.* 9 (1847) p. 280; In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu zeichnen, dessen Seiten mit den homologen des ersten einen Winkel φ bilden; *Brocard*scher Punkt, dito Winkel; Relation p. 289.

$$\cot x = \cot A + \cot B + \cot C.$$

M. Jenkins, Quarterly journ. 21 (1888) p. 84; Dreieck von konstanter Form im Dreieck; im Anschluß an *Taylor*: On the relation of the intersection of a circle with a triangle, Proceedings of the London mathem. society 15 (1884) p. 122.

R. E. Allardice, dito, Edinb. M. S. proceed. 9 (1890) p. 39. (Minimum des Höhendreiecks).

E. Cesàro, Nouv. corresp. 2 (1875) p. 429. Schreibt man in ein Dreieck zwei andere ein, deren Ecken symmetrisch in bezug auf die Seitenmitten, so sind sie flächengleich, und die Verbindungslinie ihrer S geht durch S des Grunddreiecks.

A. Mare, Nouv. annal. 3 (1844) p. 317. Bringt man die Höhen zum Schnitt mit dem Umkreis, so ist das Sechseck das Doppelte des Dreiecks.

H. Emsmann, Grun. 45 (1866) p. 353. Um A mit AB, um B mit AB Kreise und Schnittpunkte M und N auf AC und BC verbunden etc., so hat MN eine konstante Richtung.

E. Vigarié, Bourget (1885) p. 54. Die Produkte der Segmente, welche von derselben Ecke ausgehen und von zwei isogonalen Geraden hervorgerufen werden, verhalten sich wie die Quadrate der anliegenden Seiten; ders.: *Bourget* (1886).

Maur. d'Ocagne, Mathesis 7 (1887) p. 265; Figur, die entsteht, wenn man die 3 Seiten um gleiche Strecken in gleichem Sinne verlängert.

A. Mannheim, Educational times 52 (1890) p. 48, Nr. 10145. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks drei beliebige Punkte A', B', C', so schneiden sich die 3 Kreise $B'C'A$ etc. in *einem* Punkte R; zieht man ferner durch einen beliebigen Punkt M die Sehnen AME, BMF, CMG, so sind die 5 Punkte $EFGMR$ konzyklisch.

J. S. Mackay, Edinb. M. S. proceed. 6 (1888) p. 2. Dreieck und die Quadrate auf seinen Seiten als Konfiguration.

F. Benucci, Periodico 4 (1889) p. 52. Dreieck aus den Mittellinien; er kon-

struiert in sehr einfacher Weise unendliche Scharen von Dreiecken, jedes folgende aus den Mittellinien des vorigen.

H. W. Curjel, Educational times 61 (1894) Nr. 4858. Fällt man von 2 isogonalkonjugierten Punkten P und Q, z. B. H und O, Lote auf die Seiten und verbindet über Kreuz, so schneiden sich die 3 Linien auf PQ. *E. Lauvernay, Bourget* (1896) p. 101. Ist J die Mitte der Mediane $A\alpha$ und P die Mitte der bis zum Umkreis verlängerten Mediane, so ist $2A\alpha \cdot PJ = B\alpha^2$ (O braucht nicht fest zu sein) und andere Sätze (ohne Beweis).

R. Tucker, Educ. times 64 (1896) p. 47, Nr. 12793. Durch einen Punkt x innerhalb eines Dreiecks Parallelen zu den 3 Seiten zu ziehen, deren Abschnitte zwischen den Seiten gleich lang sind: $[3abc : (ab + bc + ca)]$.

Soons, Mathesis 16 (1896) p. 57; Theoreme der Geometrie. Projiziert man die 3 Ecken auf eine Gerade m, fällt dann von den Projektionen Lote auf die Seiten, so schneiden sie sich in M (*Neuberg*), und wenn m durch O geht, so liegt M auf dem *Feuerbach*schen Kreis.

Ungleichheiten.

H. Hoffmann, Grun. 9 (1847) p. 317; Bemerkungen zu *Adams* Buch: Merkwürdige Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks:

$$\frac{1}{h_a} > \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \text{ und } \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

O. Schlömilch, Schlöm. 30 (1885) p. 351; Note über Ungleichheiten, und *Hoffmann* 17 (1886) p. 1; Über Ungleichheiten in der geometrischen Anwendung zur Beantwortung der Fragen: Wann sich aus $p - a$ etc., den 3 Höhen, den 3 Medianen und den 3 Abständen von O und J ein Dreieck konstruieren läßt.

Eine eigentümliche Gruppe elementarer Sätze: Durch einen Punkt eines Dreiecks sind Parallelen zu den Seiten gezogen, oder durch einen Punkt des Tetraeders sind Parallelebenen zu den Seitenflächen gelegt, und dann Verallgemeinerung auf beliebige Parallelen zu den Seiten.

E. Bobillier und andere *Gerg.* 18 p. 111 Aufgabe p. 28. Das Produkt der 3 Parallelogramme gleich dem Achtfachen des Produkts der Dreiecke; für Tetraeder *Vallès* p. 113; nicht durch einen Punkt id. p. 202.

R. Lobatto, Correspondance mathématique de *Quetelet* 4 (1828) p. 205. $\Delta = (\Sigma\sqrt{T_k})^2$; *Gerg.* 19 p. 374 $M \cdot P \cdot R \cdot$, der Satz wird abgeleitet und auf Tetraeder erweitert, der allgemeine Satz: Wenn n Punkte und Parallelen, so $(n + 1)$ Dreiecke T_k und $\Delta = (\Sigma\sqrt{T_k})^2$ und entsprechend für Tetraeder. Siehe auch *M. Metternich*, Mainz (1821); Geometrische Abhandlung etc.

Spezielle Dreiecke.

*Pythagore*ische Dreiecke.

C. C. Gerono, Nouv. annal. 17 (1858) p. 395; Dreieck 3, 4, 5, Inhalt 6, einzige arithmetische Reihe der Differenz 1; ibid. 18 p. 44. *Lebesgue* (einz. arithm. Reihe); rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten sich um die Einheit unterscheiden: *L. Martin*, Analyst 3 p. 476. *Simerka, Grun.* 51 (65) p. 196.

Th. Gauß, Programm Bunzlau (1894). Über *Pythagore*ische Zahlen. *Graeber, Grun.* (2) 15 (1897) p. 337. Über *Pythagore*ische Dreiecke und Kreisteilung (lang, aber wenig Inhalt).

Ebene Dreiecke, deren Seiten mit R im rationalen Verhältnis stehen.

C. F. Gauß, Brief an *Schumacher* 2. Okt. 1847; dazu *Grun.* 45 p. 220, p. 221, p. 224, p. 229, p. 230.

E. W. Grebe, Grun. 17 (1852) p. 467 Dreieck mit rationalen Seiten und Mittellinien; Zusammenstellung von Stücken rationaler ebener Dreiecke: Programm Halle (1864).

W. Ligowski, Grun. 46 (1866) p. 503. *H. Graßmann, Grun.* 49. Wenn man aus den Gruppen p, $p-a$ etc. und r, r_1 etc. drei beliebige auswählt, die 1. nicht alle derselben Gruppe, 2. keine zwei mit gleicher Marke, so sind die Dreiecke rational, sobald jene in rationalem Verhältnis stehen. *Grun.* 51 p. 383, Rationale Dreiecksaufgaben aus *Paul Halken,* Mathem. Sinnenkonfekt.

M. Azzarelli, Atti nuovi Lincei, Rom 26 (1873) p. 43; Rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten relative Primzahlen, und Formeln zu ihrer Bildung.

Weill, Bulletin de la société mathématique de France 10 (1882) p. 55 (Dreieck 4, 5, 6). Rationales Dreieck, Seiten teilerfremde ganze Zahlen und das Verhältnis zweier Winkel eine ganze Zahl.

A. Strnad, Časopis 12 (1884) p. 28; Note über rationale Dreiecke. Wenn zwei Eckpunkte eines rationalen Dreiecks rationale Koordinaten haben, so auch der dritte (*Kepler*sches Dreieck).

J. Worpitzki, Hoffmann 17 p. 256; siehe auch seine Sammlung trigonometrischer Aufgaben, Anhang 1, *Pythagore*ische Dreiecke (und beliebige rechtwinklige Dreiecke). Notwendige und hinreichende Bedingung ist, daß die Tangenten von zwei halben Dreieckswinkeln rational sind.

$$a = xy(u^2+v^2); \quad b = uv(x^2+y^2);$$
$$c = (xu-yv)(xv+yu) = xy(u^2-v^2)+uv(x^2-y^2);$$
$$f = xy\,uv\,(xu-yv)(xv+yu),$$

die Höhen, die $4r$ alle rational; sollen auch die Winkel rational sein, so muß

$$x = \mu^2-\nu^2; \quad y = 2\mu\nu; \quad u = \mu_1^2-\nu_1^2; \quad v = 2\mu_1\nu_1 \quad \text{sein.}$$

Jr. Eysank, Programm (1890); Rationale Dreiecke, spezieller Fall.

R. Müller, Grun. (1889) p. 111. Über rationale Dreiecke und ihren Zusammenhang mit der *Pell*schen Gleichung.

C. A. Roberts, Mathem. magazine 2 (1894) p. 136: On rational triangles.

$$a = p^2+2q^2; \quad b = p^2+4q^2; \quad c = 2p^2+2q^2; \quad \Delta = 2pq(p^2+2q^2).$$

H. F. Blichfeldt, Annals of mathematics 11 (1896) p. 57.

$$a = m+\frac{1}{m}; \quad b = n+\frac{1}{n}; \quad c = m-\frac{1}{m}+n-\frac{1}{n},$$

wo m und n rationale Brüche.

$$\Delta = (m+n)\frac{(mn-1)}{mn}.$$

D. N. Lehmer, Annals of Math. (2) 1 (1900) p. 97, Rational triangles:

$$a = \alpha\beta(\gamma^2+\delta^2) \text{ etc. (vgl. } \textit{Worpitzki}).$$

J. M. Iversen, Nyt Tidsskrift for Mathem. (1898) p. 91.

P. Dolguschin, Russ. Pädag. Samml. 4 (1897) p. 421; Rationalität der Winkelhalbierenden in Dreiecken mit rationalen Seiten.

H. Schubert, Unterrichtsblätter (*Pietzker*) 6 (1900) p. 70. Ganzzahlige Medianen.

E. E. Kummer, *Crelle* 37 (1848) p. 1. Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen (auch die Stücke der Diagonalen sind rational). Dazu:

K. Schwering, *Crelle* 115 (1895) p. 301; Rationale Tetraeder; ders. Programm Düren (1898) Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen (im 2. Teile nicht elementar).

O. Schlömilch, *Hoffmann* 24 (1893) p. 401. Rationale Dreiecke und Vierecke aus pythagoreischen Dreiecken.

A. Droz-Farny, *Bourget* 18 (1894) p. 193. Dreiecke, deren Seiten in arithmetischer Progression stehen, geometrische Ableitung ($r = \frac{1}{6}a$, wo a mittlere Seite); siehe auch *Fuhrmann*, Synthetische Beweise geometrischer Sätze.

A. Libicky, *Časopis* 27 (1898) p. 141, desgl., aber weit früher, *Borner*, Programm Münster (1845).

Pergotti, Nouv. correspond. 2 (1876). Dreiecke, die in den Winkeln und zwei Seiten übereinstimmen und *nicht* kongruent sind:

$$a,\ aq,\ aq^2 \text{ und } aq,\ aq^2,\ aq^3, \text{ wo } 2q \text{ zwischen } \sqrt{5}-1 \text{ und } \sqrt{5}+1.$$

Enr. Presutti, *Battaglini* 21 (1883) p. 169. Dreiecke, wo $C = 2A$ (z. B. das Dreieck mit den Seiten 4, 5, 6), (Trisection, limaçon de *Pascal*), dazu:

Karl Schwering, Programm Coesfeld (1886); Über Dreiecke, deren einer Winkel das Vielfache eines anderen ist, und *E. Sachse*, *Grun.* 48 (1868) p. 358

$$[\text{wenn } \alpha = 2\beta, \text{ so ist } a^2 = b(b+c)].$$

A. S. Bang, Zeuthen Tydskr. (5) 2 (1884) p. 53. Über Dreiecke, zwischen deren Winkeln eine lineare Relation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = n \text{ Rechte, wo } \alpha, \beta, \gamma, n \text{ ganze Zahlen.}$$

J. A. Lilienthal, Programm Braunsberg (1845), 54 Aufgaben über die rechtwinkligen Dreiecke; dazu 4 Sätze, *Grun.* 21, p. 99.

Servais, Progrès (1883) 9. Sept. abgedruckt *Mathesis* 4 (1884) p. 53. Im rechtwinkligen Dreieck ist $h = r + r_1 + r_2$, wo r_1 und r_2 die Radien der beiden Inkreise der Teildreiecke durch die Höhe.

L. Benezech, *Bourget* 13 (1889) p. 193, p. 241. Propriétés des triangles rectangulaires.

Gleichseitige Dreiecke.

Newcastle magazine (1823) Dez. p. 665; Beweis von *Gergonne*, *Gergonne* 14 p. 376: Fällt man von einem Punkt des Inkreises auf die Seiten Lote, so ist die Summe der Rechtecke aus je 2 Loten konstant, weil gleich $\frac{1}{4}h^2$. *J. Steiner*, *Crelle* 45 p. 177. Für jeden Punkt p des Umkreises ist $ap \cdot bp \cdot cp = a'p \cdot b'p \cdot c'p$, wo a' Schnitt mit der Gegenseite.

Grunert, *Grun.* 20 p. 473. $\Sigma PA^2 = 3(PH^2 + HA^2)$.

F. Pollock, Quarterly journ. 1 (1857), verallgemeinert von *Cayley*, ibid. p. 381. (*Steiner*sche Kurve.)

Gleichschenklige Dreiecke.

E. Catalan, Bourget 7 (1883) p. 59. Zieht man von der Spitze B eine beliebige Transversale, welche die Basis in E und den Umkreis in D schneidet, so ist $BE \cdot BD = AB^2$.

H. Stade, Grun. (2) 5 (1887) p. 223. Dreieck, in dem $h_a = r_a - r$; $h_b = r_b + r$.

E. Lampe, Educat. times 54 (1891) p. 54, Nr. 9406. Wenn $R = 2r$ ist, so ist das Dreieck gleichseitig.

J. D'Avillez, Bourget 20 (1896) p. 246. Association française (1897). Congrès St. Etienne. Dreiecke, deren *Euler*sche Gerade einer Seite parallel ist; dazu:

Theodor Meyer, Grun. (1890) p. 307. Die merkwürdigen Punkte etc.

Sanjána, Educat. times (1896) p. 65, Nr. 12 641. S, auf dem Umfang des Inkreises, Bedingung $5\ \Sigma a^2 = 6\ \Sigma ab$.

E. N. Barisien, Congrès St. Etienne (1897); Dreiecke, in denen $h_a + a = b + c$ ist.

Als zusammenfassende und elementare Arbeiten seien hier zusammengestellt:

C. F. A. Jacobi, Leipzig (1825), De trianguli rectilinii proprietatibus.

Ch. H. Nagel (1836); Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise.

C. Adams, Winterthur (1846); Die merkwürdigen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks.

G. B. Marsano, (1863); Considerazioni sui triangolo rettilineo Genova; und die verschiedenen Arbeiten von

J. S. Mackay in den Edinburgh M. S. proceedings.

E. Polygone.

21. Viereck. Die eigentliche Quelle für die große Mehrzahl der Vierecksätze sind die Kegelschnitte und die projektive Geometrie, und es knüpft sich daran die Aufgabe, die so erhaltenen Sätze elementar zu beweisen. Immer wieder kehrt der sogenannte *Gauß*sche Satz, der mit demselben Recht *Newton*scher (so nennt ihn *Steiner*), auch *Rochat*scher Satz heißen könnte, und die andern Sätze, welche *Steiner* als Théorèmes sur le quadrilatère complet, *Gergonne* 18 (1827) p. 302 ohne Beweis mitteilt, und die Sätze über das Kreisviereck, *Crelle* 2 p. 96 und desgl. *Gerg.* 19 p. 37. Viele von den Sätzen lassen sich bis *Lahire* und weiter verfolgen und die meisten ließen sich wohl als spezielle Fälle der Porismen und Sätze von *Pappus* erweisen.

Das „quadrilatère complet" hat als solches vielleicht zuerst *Carnot* (1801) betrachtet, die genaue Unterscheidung zwischen vollständigem Vierseit und vollständigem Viereck rührt von *Steiner* her. Bezeichnung: Seiten a, b, c, d, Diagonale $AC = e$, $BD = f$, Fläche $= F$, Eckenschwerpunkt (Schnitt der beiden Medianen) M, Flächenschwerpunkt S, halber Umfang p.

Einfaches Viereck.

L. Puissant, Die 4 Zentren der Kreise, welche innen je 3 Seiten eines einfachen Vierecks berühren, sind konzyklisch. *Hachette,* Correspondance sur l'école polytechnique 1 (1806) 1. Juli, bewiesen vom Schüler *B.*

*Euler*sche Formel von *Rochat* etc.: *Gerg.* 2 p. 31 bewiesen:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4RS^2,$$

wo R und S die Mitten der Diagonalen; dazu *D. Besso,* Periodico 1 (1886) p. 53, auch für windschiefe Vierecke.

Brune, Crelle 22 (1840) p. 379. Verbindet man den Schnittpunkt der Parallelen zu jeder Diagonalen durch die Mitte der andern mit den Mitten der 4 Seiten, so zerfällt das einfache Viereck in 4 gleiche Teilvierecke; s. auch Nouvelles annales 8 p. 365.

J. Steiner, Systematische Entwicklung § 23, 3; Teilt man ein einfaches Viereck durch eine Transversale in zwei Vierecke, so liegen die Schnitte der Diagonalen der 3 Vierecke in *einer* Geraden; elementarer Beweis von *J. Bauschinger Schlömilch* 2 (1857) p. 122 (und selbstverständliche Erweiterung); derselbe Satz: Nouvelle correspondance 2 (1875) p. 109.

Fr. Strehlke, Grunert 2 (1842) p. 325;

$$F^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2},$$

entsprechend für das sphärische Viereck; dieselbe Eormel bei *Bretschneider, Grun.* 2 p. 225 sowie *A. H. Anglin,* Quarterly journal 19 (1883) p. 138. Tangentenviereck: $F = \sqrt{abcd}\sin\omega$, wo 2ω die Summe zweier Gegenwinkel.

G. Dostor, Nouv. annal. 7 (1847) p. 239:

$$16F^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \text{ im Tangentenviereck;}$$

$$16F^2 = 4(e^2f^2 - (ac + bd)^2) \text{ im Tangenten- und Sehnenviereck.}$$

P. Serret, Des méthodes, Paris (1855) p. 9. Wenn $abcd$ ein einfaches Viereck und Punkt O so liegt, daß Dreieck $Oab + Ocd = Obc + Oda$, so liegt O in der Geraden durch die Mitten der Diagonalen (*Newton*scher Satz vom Tangentenviereck spezieller Fall).

E. Catalan, Nouv. correspond. 1 (1873) p. 31. Wenn im einfachen Viereck 2 Seiten gleich, so sind sie gleich geneigt gegen die Mediane der beiden andern. Sätze von

P. Meutzner, Grun. 55 (1868) p. 42 u. a.: Die Projektion der Ecken eines einfachen Vierecks auf die Diagonalen bilden ein (negativ) ähnliches einfaches Viereck ($\lambda = \cos\varphi$, wo φ Diagonalwinkel), schon bei *Rochat, Gerg.* 1; der Schwerpunktsatz bei *Sylvester,* Quarterly journal 6 p. 130.

E. Catalan, Théorèmes et problèmes, hübsche Vierecksätze.

Den Satz von *Desargues* über die Involution beweist *Weiler, Schlömilch* (1882) projektiv, aber *Alf. Leman,* Programm Mülhausen (1898) elementar.

F. August, Grun. (2) 4 (1886) p. 330 Satz von *Hoppe,* sehr einfach bewiesen, Flächenschwerpunkt S (einfache Konstruktion), Diagonalschnittpunkt E und Eckenschwerpunkt T (M) in *einer* Geraden und so, daß $ET : TS = 3 : 1$.

A. Peter, Hoffmann Zeitschrift 29 (1898) p. 108. „Brennstrahlen-Viereck" $a + b = c + d$). Über die 3 verschiedenen „Arten" der Vierecke (konvexe, Vierecke mit einspringendem Winkel und überschlagene) vgl.:

Max Brückner, Vielecke und Vielflache, Leipzig (1900), wo sich die ganze Literatur findet.

Vollständiges Viereck und vollständiges Vierseit.
(= Ve. und Vs.)

Im Ve. bilden die Diagonalen das dritte Paar der Gegenseiten, die 4 Dreiecke: D_1 etc.

Vs.: Der sogenannte *Gauß*sche Satz: Die 3 Mitten der 3 Diagonalen eines Vs. liegen in *einer* Geraden, *Gauß*, *Zach*, Monatscorrespond. 22 (1810) p. 115, von *Steiner* *Newton*scher genannt, findet sich nach einem Artikel von *Mackay*, Edinb. mathem. society proceed. 9 (1890—1891) bei *Connor* in The Ladies' diary (1795); der Satz ist gleichzeitig mit *Gauß* von *Rochat* gefunden und einfach analytisch bewiesen samt der Vervollständigung, daß auf derselben Geraden die 3 Zentren der mittleren Entfernung (M) der 3 V. aus den Endpunkten je zweier Diagonalen liegen: *Gerg.* 1 (1811) p. 314 und von *Vecten* ebendort einfach geometrisch bewiesen. *Poncelet*, Traité 164; *Chasles*, Geométrie supérieure p. 488; *Fenwick*, The Mathematician 2 (1847) p. 292 analytisch; dito Quarterly journ. 6 p. 127 sehr einfach statisch, dazu Note von *J. J. Sylvester* p. 130; *F. Paugger*, *Schlöm.* 2 (1857) p. 56 (beim Tangentenviereck durch O). *Matthew Collins*, (1870) Geometrical miscellanies, sehr einfacher Beweis mittels Ergänzungsparallelen *Schlömilch*, *Schlöm.* 23 (1878) p. 191 als spezieller Fall eines allgemeinen Dreieckssatzes; *Arnold Sachse*, *Schlömilch* 27 p. 381 (1882) als spezieller *Fall eines allgemeineren* (projektiv).

John Casey, A sequel to *Euclid* (1888) p. 5; sehr einfach.

R. E. Allardice, Edinb. mathem. society proc. 8 (1890) p. 27 (spezieller Fall, elementar.)

J. Dougall, ibid p. 15 (1897) p. 81, sehr einfacher Beweis.

Sollertinsky, Mathesis 12 p. 114; Verhältnis der Abstände nur von der Richtung der 4 Geraden abhängig.

Verallgemeinert ist der Satz durch *Bodenmiller* nach Angabe von *Gudermann*, Analytische Sphärik, Köln (1830) p. 138. Die 3 Kreise über den 3 Diagonalen eines Vs. haben eine gemeinsame Radikalachse (schneiden sich in denselben beiden Punkten).

A. Möbius, Gesammelte Werke 2 (1854) p. 237. *Schlömilch*, Sächsische Berichte 4 (1854) trigonometrisch. *Chasles*, Géométrie supérieure, 2. Aufl. p. 354. *Schlömilch*, *Schlöm.* 2 p. 247; Die 6 Kreise des Ve. *R. Tucker*, Educat. times 26 (1876) Nr. 5058; gemeinsame Sehne sei c, so ist (Beschränkung auf Kreisviereck):

$$c^2 = 2(\varrho_1^2 + \ldots) - \varrho_1^2\varrho_2^2\varrho_3^2(\varrho_1^{-4} + \ldots).$$

Erweiterung bei *Franz Seydewitz*, *Grun.* 8 p. 231 Lehrsatz 8.

In *Gergonne* 18 p. 302, gesammelte Werke 1 p. 223 findet sich eine Anzahl von Sätzen von *Jakob Steiner*, Théorèmes sur le quadrilatère complet, ohne Beweis:

1. Die 4 Umkreise der 4 Dreiseite schneiden sich ...

2. Die 4 Umkreiszentren mit P konzyklisch.

3. Die Fußpunkte der Lote von P liegen auf *einer* Geraden R'.

4. Die 4 Höhenschnittpunkte der vier Dreiseite liegen auf einer Geraden.

5. R und R' sind parallel und R geht durch die Mitte des Lotes von P auf R' (vgl. *Simson*sche Gerade).

6. *Gauß*scher Satz: die Gerade: R''.

7. R'' senkrecht auf R und R'.

8. In jedem der 4 Dreiecke gibt es 4 Berührungskreise, die Zentren dieser 16 Kreise liegen von 4 zu 4 auf einem Kreise (8 neue Kreise).

9. Diese 8 Kreise teilen sich in 2 Gruppen, so daß jeder der ersten die vier der anderen orthogonal schneidet. Die 8 Zentren liegen also auf 2 Geraden.

10. Diese schneiden sich in P und stehen aufeinander senkrecht.

Während die ersten Sätze oft elementar bewiesen werden, ist mir von den letzten nur *ein* Beweis bekannt:

Mention, Nouv. annal. (2) 1 (1862) p. 16, p. 65.

Nach *Mackay* (l. c.) ist Satz 1. von „*Scoticus*" (Pseudonym für *Wallace?*) zur Lösung vorgelegt in *Leybourne*'s Mathematical repository (1804) p. 22 und ibid. (1) 1 p. 170 gelöst.

Satz 1. und 2.: u. a. *Ehlert, Grun.* 69 p. 332 analytisch und *Sporer, Schlöm.* 31 p. 43 synthetisch.

Hermes, Nouv. annal. 18 p. 171. *J. Mention,* Nouv. annal. (2) 1 (1862) p. 16, p. 65.

Satz 4.: *Heinen, Crelle* 3 p. 290 analytisch. *Franz Seydewitz, Grun.* 3 p. 231 gleichseitige Hyperbel, *Grun.* 46 p. 328, *E. Schmidt* mit *Menelaos,* elegant *Hulisch* und *Stammer.* (*Grunert* schreibt Bd. 45 den Satz *Sylvester* zu!)

Ich bemerke, daß schon *Mandelier,* Correspond. *Quetelet* 5 (1829) p. 218 vom vollständigen Vierseit beweist, daß für P (aus Satz 1)

$$PA \cdot BC \cdot CD = PB \cdot CD \cdot DA \text{ etc.}$$

Rochat, Gerg. 1 (1871) p. 314. Der Abstand der Mitten zweier Diagonalen ist doppelt so groß wie der der beiden Zentren M der beiden einfachen Vierecke, zu denen die Diagonalen gehören.

Vecten, Gerg. 15 p. 41; merkwürdige Gegenseitigkeit zweier Vs. id. ibid. 15 p, 146.

E. Cesàro, Nouv. correspond. 6 (1880) p. 477. *Colombier, Bourget* (1880) p. 113, harmonische Eigenschaften (*Ceva, Menelaos*).

A. Cunningham, Messenger 27 (1882) p. 188; On the circle etc.

Vollständiges Viereck = Ve.

Aufgabe von *Gergonne* und *Lavernède,* Die 3 Medianen eines Ve eben oder windschief, schneiden sich in *einem* Punkt (*M,* dem Ecker schwerpunkt; dual zum *Gauß*schen Satz): *Gerg.* 1 p. 177, p. 310 b wiesen von *de Stainville* (statisch), *L'Huilier, Tédénat, Vecten,* seitde sehr häufiger Übungssatz in den Lehrbüchern.

C. A. Bretschneider, *Grun.* 2 p. 225; Untersuchungen der trigono-
ıetrischen Relationen des geradlinigen Vierecks, darin zuerst der Gedanke,
n (Exzeß) Dreieck E einzuführen, dessen Seiten die Produkte der
egenseiten sind (vgl. Inversion, *Neuberg*, Mémoire sur le tétraèdre
884) p. 22 Anm.) und dessen Winkel in sehr einfachen Beziehungen
der Summe der Gegenwinkel stehen. In dasselbe Dreieck trans-
mierte *Möbius* durch komplexe Interpretation von AB (bezw. durch
rersion) das Viereck: Longimetrie, Gesammelte Werke 2 p. 196,
öbius hat selbst die Priorität *Bretschneider*'s bemerkt.

Wichtig *Bretschneider*, *Grun.* 3 (1843) p. 85. Über die ab-
eiteten Vierecke; die Mittelpunkte der Umkreise; Invariante
$= 4\sqrt{D_1 D_2 D_3 D_4}$. Es bilden die 6 Perpendikel, welche von den Mittel-
ıkten der 6 Seiten des Urvierecks auf die Gegenseiten gefällt sind,
derum ein einziges Ve., das dem der Umkreiszentren kongruent
l ähnlich liegend ist. (Ähnlichkeitspunkt ist M), also beim Kreisve.
neiden sich die 6 Lote in *einem* Punkt N, welcher mit dem Zentrum
Kreises O und M in gerader Linie liegt und so, daß M die Strecke
Y halbiert. Höhenpunkte der 4 Dreiecke, im Kreisve. begrenzen sie
kongruentes und ähnlich liegendes (Gegenseitigkeit). Elegante syn-
tische Beweise in *Kunze*'s Lehrbuch (1851).

O. Terquem, Nouv. annal. 6 p. 68. Anwendung des *Fontaine-
ler*schen Dreieckssatzes (Nouv. annal. 5 p. 154). Ist O ein Punkt,
ist die algebraische Summe der Produkte der Dreiecke, deren
itze O und deren Grundlinien die Gegenseiten sind, gleich Null.

L. Matthiessen, *Battaglini* 5 (1867) p. 232; 12 Sätze *ohne Beweis*,
z 12 = Satz 10, hauptsächlich Punkt M betreffend. Satz 6: Zieht man
rch die Mitten der Dreiecksseiten Parallelen zu den Gegenseiten, so
ıneiden sich die 12 Geraden in den 4 Ecken eines Vierecks, das
n ersten kongruent ist, Ähnlichkeitspunkt ist M. Satz 7: Die
Lote etc. wie *Bretschneider*.

Kreisviereck (Kv.)

J. Steiner, Théorèmes relatifs aux sections coniques, *Gergonne* 19
37 als Anmerkung ohne Beweis, der in „Die geometrischen Kon-
uktionen“ (1833), Anmerkung zu § 12, Ähnlichkeitspunkt, angedeutet
. $ABCD$ das Kv. (vollständiges Viereck); die 4 Höhenpunkte der
Dreiecke A_k; Schwerpunkte J_k; 4 Zentren der *Feuerbach*schen Kreise
$_k$; das Zentrum des Umkreises M, dann bilden 1. die 4 A_k ein
ngruentes und ähnlich liegendes Viereck, Zentrum A; 2. die 4 J_k
ılich und ähnlich liegendes, $\lambda = \frac{1}{3}$, Zentrum J; 3. die 4 M'_k dito

$\lambda = \frac{1}{2}$, Zentrum M, und es liegen auch die 4 Zentren in derselben Weise harmonisch, wie ein bestimmtes System, also AM und JM so, daß $JM_1 : JM : AM_1 : AM = 1 : 2 : 3 : 6$, also M für alle 4 Kreise Ähnlichkeitspunkt.

Der Satz über die Höhen ist zuerst von *Heinen*, *Crelle* 3 p. 288 mittels Hyperbel bewiesen; er findet sich ohne Beweis bei *L. Matthiessen* (l. c.); mit sehr elementarem Beweis in *Catalan*'s Théorèmes et problèmes; elementar bei *Max Greiner*, *Grun.* 60, wo auch die andern *Steiner*schen Sätze elementar, und vielleicht neu der Satz, daß der Schnittpunkt der 4 *Feuerbach*schen Kreise zugleich der Punkt N_0 ist, in dem sich die 6 Mittellote schneiden. Ebenso bei *Geiser*, Einleitung in die synthetische Geometrie (1869).

Der Satz: Die 4 *Simson*schen Geraden einer Ecke in bezug auf die andern schneiden sich in N_0, ist von *Steiner* nicht direkt ausgesprochen, er ist als Aufgabe von *E. Lemoine*, Nouv. annal. (2) 8 (1867) p. 47 gestellt und von *Figa*, *Bartolomei*, *Morel*, *L. Kiepert* bewiesen (von letzterem am elementarsten) p. 317. *A. Morel* gibt dort auch den z. B. bei *Catalan* und auch sonst oft vorkommenden Satz: Irgend 4 Kreise über den Seiten bestimmen wieder ein Kv.; spezieller Fall: Die 4 Projektionen der Ecken auf den Diagonalen begrenzen ein Kv.

Satz von *Steiner*, *Crelle* 2 (1827) p. 96; halbiert man im Kv. die Winkel der 3 Paar Gegenseiten, so sind von diesen 6 Geraden je 3 einander parallel. Beweis *Remy*, *Crelle* 3 p. 84; *Heinen* p. 288; *Pury*, Nouv. annal. 1 (1842) p. 358, fügt hinzu, daß die Halbierungslinien der Fünf- und Sechsten Ecke sich innerhalb des Vierecks halbieren; *Chasles*, Géométrie supérieure (2. Aufl. p. 395, Schluß); *E. J. Nöggerath*, *Grun.* 49 (1867) p. 118 ebenfalls Zusatz von *Pury*; *Sylvester*, Educat. times 15 (1871) p. 36; *E. Catalan*, Nouv. correspond. 2 (1876) und *Umkehrung*; seither sehr häufiger Übungssatz.

A. Jacobi, *Crelle* 31 (1846) p. 41. Ist $ECDF$ ein Kv., so ist das Quadrat der Geraden, welche die Durchschnitte je zweier Gegenseiten verbindet, gleich der Summe der Quadrate ihrer Tangenten.

J. Steiner, *Crelle* 44 (1852) p. 275, Beim vollständigen Kv. haben die Rechtecke aus den 3 Paar Loten aus einem Punkt des Umkreises auf die 3 Paar Gegenseiten gleichen Inhalt, *M. A. Blanchet*-(*Legendre*); elementarer Beweis bei *Casey*, A sequel to *Euclid* p. 34.

J. McDowell, Quarterly journal 5 (1862) p. 280 sehr elementar Kv. und Parallelogramm.

J. Neuberg, Nouv. correspond. 1 (1875) p. 96; Die Zentren der 4 Inkreise der 4 Dreiecke bestimmen ein Rechteck.

E. Lemoine, Nouv. correspond. 2. Zieht man durch 2 feste Punkte C und O

2 Paar Geraden, welche sich in den Ecken eines Kv. schneiden, so ist der Ort der Zentren eine Gerade.

J. A. Grunert, Grun. 5 p. 430; Spezialfall: Ist eine Diagonale ein Durchmesser, so steht die Gerade, welche die 5. und 6. Ecke verbindet, auf ihr senkrecht. (Trigonometrisch.)

A. Cayley, Messenger 17 (1888) p. 94. Note etc.

J. W. L. Glaisher, Educational times 26 (1874) Nr. 4238 historische Konstruktion aus den 4 Seiten (auch *A. Haußner, Grun.* 65, p. 334). *Ptolemäos* $ef, e:f$ etc.

A. L. Candy, Annals of Mathematics 10 (1896) p. 175. Aus sehr einfacher Relation (8), viele Transversalensätze.

Jul. Nager, Wiener Monatsberichte (1896) p. 325 (s. o. *E. Lemoine*).

Der Satz von *Alb. Girard*, 3 konvexe Vierecke mit denselben Seiten $abcd$, $abdc$, $acbd$ im selben Kreis haben gleiche Fläche. *Dostor, Grun.* 48 p. 245; aber schon in *L. A. Kunze*'s Lehrbuch der Geometrie (1851) Jena, und noch weit vorher *Grüson, Crelle* 10 (1833) p. 275. Die Formel für die Fläche J, welche der *Heron*schen Dreiecksformel entspricht, ist schon im 18. Jahrhundert bekannt (*Lexell, Euler, L'Huilier*), bei *Meier Hirsch* (1805) Sammlung geometrischer Aufgaben p. 33 nebst analogen §§ 30, 32, 33; s. a. *B. Tortolini*, Annali de *Tortolini* 6 (1864) p. 46; Diagonalen x und y, x zwischen (b, c) und (a, d); $x^2 = (ad + bc)(ac + bd):(ab + cd)$, daraus *Ptolemäos*, sin Θ (Diagonalwinkel); Fläche J; $r^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{16 J^2}$, die sich z. B. in *Serret*s Trigonometrie findet.

Kv., dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, (in P) (*Archimedes, Brahmagupta*). Alle umschriebenen Rechtecke einander ähnlich: *J. Murent*, Nouv. annal. 14 (1855) p. 365.

L. Sancery, Nouv. annal. (2) 10 (1862) p. 487.

Frz. Schiffner, Grun. (2) 4 (1866) p. 325. 4 Sätze ohne Beweis; daß PO von M halbiert wird, schon lange vorher bei *Sancery; Delpit, Bourget* (1881) p. 241; *Ed. Lucas*, Nouv. Corresp. 5 (1879). Projiziert man P auf die Seiten und verlängert die Lote bis zur Gegenseite, so liegen die 8 Punkte auf *einem* Kreis, dessen Mitte M (Schnitt der Medianen) ist; der Kreis bleibt konstant, wenn die Diagonalen sich um P drehen (*Sancery*). Die 4 Projektionen sind die Ecken eines Vierecks, das um und einschreibbar ist:

$$ABCD : A'B'C'D' = R : r'.$$

Daß die 6 Lote in den Mitten der Seiten konpunktisch sind, ist in diesem Spezialfall schon von *Brahmagupta* gefunden.

Harmonisches Kv. $(AB \cdot CD = AC \cdot BD)$. *R. Tucker*, London mathemat. society (1885) 12. Febr. Some properties etc. Es gibt einen (*Lemoine*schen) Punkt, dessen Abstände von den Seiten den Seiten

selbst proportional sind. *J. Neuberg,* Mathesis 5 (1885) p. 4, 17, 65, 202. *Clém. Thiry, Bourget* (1887) p. 223; es gibt einen *Lemoine*schen Punkt, der als Schnittpunkt der Diagonalen bestimmt wird, vgl. auch *Casey* (1888) A sequel to *Euclid,* section 6.

Eine sehr vollständige Sammlung von Formeln das Kv. betreffend: *Lecocq, Bourget* 21 und 22.

Tangentenviereck (= T.)

Jak. Steiner, Crelle 2 p. 205 vervollständigt die bekannte Bedingung: Jedes Viereck, in welchem die Summe zweier Seiten gleich der der andern beiden ist, ist ein T. und umgekehrt.

J. B. Durrande, Gerg. 6 p. 49. Jedes Viereck, eben oder windschief, in dem $a + c = b + d$ ist, ist ein T.; id. *Gerg.* 14 p. 309 (*Newton*scher Satz). In jedem T. geht die *Gauß*sche Gerade durch das Zentrum des Inkreises; Beweis mittels der Radikalachse spezialisiert fürs Dreieck: die Gerade, welche die Mitte von b mit der Mitte von BE, wo E Berührungspunkt auf b ist, verbindet, geht durch das Zentrum des Inkreises. *Poncelet, Gerg.* 12 p. 109.

Ein- und umgeschriebenes Viereck (Schließungsproblem). *Durrande, Gerg.* 15 p. 133—145, Sätze von *Poncelet* im Traité (1822), neu der Satz: Das Rechteck aus den Tangenten zweier Gegenpunkte ist konstant, weil gleich dem Quadrat des Radius des Inkreises; sehr elementare Ableitung der *Euler*schen Relation fürs Viereck; Zentren der beiden Kreise und Diagonalenpunkt in *einer* Geraden.

J. Schumacher, Grun. (2) 2 (1885) p. 383. Viel Material, Sätze teilweise neu.

Trapez: *L. Vautré, Bourget* (1894) p. 97. Die Differenz der Diagonalen $\geq$ der der schrägen Seiten. Konstruktion aus beiden Diagonalen und den schrägen Seiten. *Maurice d'Ocagne, Bourget* (1879) p. 370; 2 Sätze.

Andere Vierecke.

C. F. Hertter, Das Trapez, „bisher Stiefkind, jetzt Krystallkern der Planimetrie". Tübingen (1889). Daß das Trapez eine Quelle von hübschen Aufgaben wie das ihm so nahe verwandte Kreisviereck, ist seit 50 Jahren ein offenes Geheimnis und wußte schon *Heron* von Alexandria.

Parallelogramm. Wenn die 4 Seiten eines Parallelogramms 4 feste Punkte in gerader Linie haben, so haben die Diagonalen 2 feste Punkte auf derselben Geraden. (Transversalensatz.) Nouv. correspond. 3 p. 146.

J. Neuberg, Mathesis 14 p. 268. Pseudoquadrat (Diagonalen gleich und rechtwinklig). Kontraparallelogramm ist Sternviereck, in dem:

$$AB = CD = AD = BC, BD \parallel AC,$$

Mathesis 14 p. 227; Deltoïd (2 gleichschenklige Dreiecke auf derselben Basis) bei *C. G. Reuschle, Schlöm.* 10 (1864) p. 506 (2 Berührungskreise etc.); *Schlömilch*, Doppeltzentrische Vierecke; (*Schlöm.* 33 p. 191 Maxima und Minima); *Ch. Beyel*, 57 Sätze über das orthogonale Viereck (Dreieck und seine Höhen) *Schlöm.* 34 (1889) p. 218, 290 (*Carnot* 1801); *Schlöm.* 40 (1895) p. 372, Involutorische Eigenschaften des doppeltzentrischen Vierecks.

Aufgaben: Viereck von gegebenen Seiten, so daß die Diagonalen gleich sind: *Grun.* 5 (1844) p. 111. Quadrat aus den Abständen dreier seiner Ecken von einem festen Punkte: Educat. times 36 (1882) Nr. 6667, *Miller.*

Fünfeck.

Satz von *A. Miquel* (1836, als Schüler des Instituts *Barbier*): Wenn man um die 2 Dreiecke aus je einer Seite eines gewöhnlichen Fünfecks und den Verlängerungen der beiden anliegenden Seiten Kreise beschreibt, so liegen ihre 5 freien Schnittpunkte auf *einem* Kreis (erweitert von *Clifford*, s. Kreis).

Grunert, Crelle 5 p. 316. Wenn alle Seiten eines Fünfecks verlängert werden, so schneiden sich die 5 Geraden, welche die Mitten der Diagonalen (Medianen) eines jeden der Vierecke $ABEA'$, $BACB'$ etc. verbinden, in *einem* Punkt; derselbe Satz *Mention*, Nouv. annal. 12 (1853) p. 419.

G. de Longchamps, Nouv. correspond. 3 (1877) p. 306 und 310, über Systeme von Geraden und Kreisen. Ein vollständiges Fünfseit enthält 5 vollständige Vierseite; die 5 Kreise (*Steiner*scher Satz 2) schneiden sich in *einem* Punkt und die Zentren sind konzyklisch etc.

Fünfeck in und um den Kreis, a, b, c, d, e Seiten.

$$\frac{a(c-d)}{b+e-a} + b\left(\frac{\cdots\cdot}{\cdots\cdot}\right) + \cdots = 0.$$

A. Russell, Educat. times 50 (1889) p. 109, Nr. 9556.

J. Mention, Nouv. annal. (21) (1862) p. 16, p. 65, Schnitt der 5 Medianen der 5 Vierseite eines Fünfseits im Radikalzentrum der 10 Höhenkreise und der 5 Diagonalenkreise.

Analoge Eigenschaften des um- und eingeschriebenen Vierseits und Fünfflachs, *H. M. Jeffery*, Quarterly journ. 25 (1891) p. 336.

Die infolge einer Aufgabe von *Möbius* (Gesammelte Werke 1 (1823) p. 388) von *Gauß* gegebene Formel:

(ABC, BCD, ... EAB der Reihe nach: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ und S Fläche des Pentagons $ABCDE$).

$S^2 - S(\alpha + \beta + \ldots\ \varepsilon) + \Sigma\alpha\beta = 0$ (*Gauß* Nachlaß) von *P. Serret*, Nouv. annal. 7 p. 28 bewiesen. *Möbius* bemerkt (l. c.), daß die Formel sich nicht ändert, wenn α etc. die Vierecke $ABCD$, $BCDE$ etc. bezeichnen.

Ähnliche Eigenschaften wie das Vierseit (*Gauß*scher Satz etc.) bei *E. Ferier*, Nouv. annal. 8 (1849) p. 142.

W. H. Preuß, *Schlöm.* 23 (1878) p. 194, Satz vom Sehnenfünfeck.

22. Polygone mit größerer Seitenzahl. Zur Elementargeometrie gehört im wesentlichen nur das konvexe Polygon, das ganz an einer Seite jeder Kante liegt, allenfalls die Polygone ohne Doppelpunkte; doch wird auch z. B. das reguläre Sternfünfeck vielfach elementargeometrisch behandelt; für die Polygone mit Doppel- und vielfachen Punkten ist selbst die Frage nach dem Inhalt kontrovers, vgl. Polyeder und *Inhalt*.

Poinsot, s. bei Polyeder, desgl. *Cauchy* 1810 und 1813. *Pigeon*, Cah. 16 des journal de l'école polytechnique p. 183.

A. Möbius, *Crelle* 3 (1828) p. 5; Polygon im Kreis, Bestimmung des Radius und der Fläche durch die Seiten, Grad der Gleichung.

J. A. Timmermans, *Gergonne* 18 (1828) p. 217, Polygone und Polyeder; Stellung bezw. Richtung, welche die Eigenschaft hat, daß die algebraische Summe der Abstände der n Ecken des Polyeders oder Polygons konstant sei.

Anonym, (*Greathead*), γ, Cambridge Mathematical journal 1 Nr. 4 (1838) p. 192. Winkelsumme für Kreispolygone, wenn n gerade.

$$A_1 A_2 A_3 + A_2 A_3 A_4 + \cdots + A_{n-1} A_n A_1 = (n-2)\frac{\pi}{2},$$

schon bei *Carnot*, Géométrie de position, Satz 35.

G. Lamé, *Liouville* 3 (1838) p. 505; Das Problem: Auf wieviel Weisen kann man ein n-Eck durch die (sich nicht schneidenden) Diagonalen in Dreiecke zerschneiden? Auf Aufforderung von *Terquem*. *G. Lamé* beweist elem. 3 Formeln, wenn P_n die betreffende Anzahl ist und $P_3 = 1$, so ist:

1. $P_n + 1 = P_n + P_3 P_{n-1} + \cdots + P_{n-1} P_3 + P_n;$
2. $P_n = n(P_3 P_{n-1} + P_4 P_{n-2} + \cdots + P_{n-1} P_3) : 2n - 6;$
3. $P_{n+1} = (4n - 6) P_n : n.$

Formel 3 ist von *Euler* ohne Beweis, Nova acta Petropolitana 7 (1758—59) p. 14; Formel 1 von *Segner*, ibid. p. 203 abgeleitet. *Rodrigues* leitet sie p. 547 direkt ab und *Catalan* gibt p. 508 die Formel:

4. $P_{n+2} = C_{2n,\,n} : n + 1,$

wo $C_{p,\,k} = p_k$ ist; dieselbe Formel reproduziert *Abbé Gelin*, Mathesis 3 (1883) p. 108, in der Form $P_n = 2^{n-2}\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (2n - 5) : (n - 1)!$

J. Binet leitet 3 aus 1 funktionentheoretisch ab: *Liouv.* 4 (1839) p. 79.

E. Catalan, ibid. p. 91 ohne Integration der Differenzengleichung 1 und 3 und die Formel *A*:

$$P_{n+1} - \binom{n}{1} P_n + \binom{n-1}{2} P_{n-1} - \cdots = 0.$$

J. Liouville, *Liouv.* 8 (1843) p. 391; Remarque sur un mémoire de *Nic. Fuß* (Nova acta Petrop. 9 (1761); un polygone P_n étant donné, en combien de manières peut-on le partager en polygones de m côtés au moyen de diagonales

$n = im - 2(i-1)$; $\varphi(i)$ die gesuchte Anzahl; funktionentheoretisch findet *Liouville* mit der Reihe von *Lagrange:*

$$\varphi(i) = (im - i)(im - i - 1) \cdots (im - 2i + 2) : i;$$

Dasselbe Resultat (in etwas anderer Form) und auf dieselbe Weise leiten *H. M. Taylor* and *R. C. Rowe* ab in London mathem. society proceedings 13 (1882) p. 102—106.

Das Problem von *Lamé-Euler* erweitert *T. P. Kirkman*, Philosophical transactions 147 (1857) p. 225; on the partage of the r-gone and r-ace, dahin: ein Polygon durch die Diagonalen in k Teile zu teilen, (*Lamé* Spezialfall, wo $k = r - 2$); er gibt die richtige Formel ohne strengen Beweis, den

A. Cayley, London mathem. society 22 (1891); p. 237 on the partage of a polygon gibt. Er behandelt 3 Probleme: 1. *Lamé*; 2. *Kirkman* 3. *Fuß-Liouville* und gibt für 2:

$$[r+k-2]^{k-1}[r-3]^{k-1} : [k]^{k-1}[k-1]^{k-1}, \text{ wo } [n]^k = \binom{n}{k}.$$

Die Arbeit ist aber keineswegs elementar.

Hierher gehört:

Delorme, Nouvelles annales 7 (1847) p. 91; Zahl der inneren Schnitte der Diagonalen eines konvexen Polygons (ganz elementar).

J. Steiner, *Crelle* 2 (1827) p. 265; 2 polygonom. Sätze, Beweis des Satzes: *Crelle* 1 p. 38; Erweiterung des *L'Huilier*schen Satzes (reguläres Polygon), siehe *Simson*sche Gerade.

Ad. Guibert, *Liouv.* 4 (1839) p. 392; wieviel n-Ecke sind in einem System von n Punkten, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen: $(n-1)! : 2$ (läßt sich einfacher zeigen), *J. Steiner*, Syst. Entw. Nr 19 (1832); schon *Carnot*, géométrie de posit.; *Schumacher* (1808) p. 209.

J. H. T. Müller, *Grunert* 2 p. 106, 113; Winkelsumme in Polygonen und Eckensumme in Pyramiden.

L. Anne, Nouv. annal. 8 (1844) p. 25; Sind 2 ähnliche und ähnlich liegende Polygone gegeben, so ist jedes, das dem einen um- und dem andern eingeschrieben ist, mittlere Proportionale zu ihnen; vgl. *Rochat*, Gerg. 2 p. 93.

A. Prouhet, Nouv. annal. 3 p. 19. Ein konvexes Polygon von $2n+1$ Ecken ist durch die Mitten seiner Seiten bestimmt, von $2n$ Seiten unmöglich oder unbestimmt; dazu *E. Prouhet*, ibid. 10 (1851) p. 181: 2 Polygone von $2n$ Seiten mit denselben Seitenmitten sind flächengleich; Beweis p. 316 von *Jullien*.

E. Brassine, Nouv. annal. 6 (1847) p. 226; Zerlegung eines Polygons durch Diagonalen.

E. Prouhet, Nouv. annal. 9 (1850) p. 130. Sur les polygones inscrits dans un cercle. Es gibt immer *einen* Kreis, dem sich ein konvexes Polygon von gegebenen Seiten einschreiben läßt, wenn die größte Seite kleiner als die Summe der andern. $n-3$ Bedingungen für ein n-Eck etc. Derselbe: ibid. 10 (1851) p. 122; als Fragen. Die Fläche eines $2n$-Ecks ändert sich nicht, 1. wenn alle Ecken von gerader oder alle von ungerader Nummer gleiche und parallele Strecken beschreiben, 2. wenn P_1 Inhalt eines konvexen Polygons von n Seiten, P_2 das

Polygon, dessen Ecken die Mitten der Seiten des ersten sind usw., so ist für gerade n:

$$P_1 - \frac{n^2-2^2}{3!} P_2 + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!} P_3 - \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{7!}$$

$$P_4 - \cdots (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n^2-2^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{(n-1)!} P_{\frac{n}{2}} = O;$$

oder wenn n ungerade:

$$P_1 - \left(\frac{n^2-1}{2!}\right)^2 P_2 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!} P_3 \cdots$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n^2-1^2)(n^2-3^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{(n-1)!} P_{\frac{n}{2}-1} = O.$$

P. Tardy, Sopra un teorema di poligonometria abgedruckt *Crelle* 47 (1854) p. 138, beweist die Formeln und zeigt, daß sie identisch sind mit

$$\sin mx = m \sin x \cos x f(\sin^2 x), \quad \cos mx = \cos x \varphi(\sin^2 x).$$

Barbet, Nouv. annal. 9 p. 183; Note über die Winkelsumme.

J. Mention, Nouv. annal. 12, p. 419; Die 5 Medianen der 5 Vierecke, die man erhält, wenn man im Pentagon 13, 24, 35, 41, 52 zum Schnitt bringt, schneiden sich in *einem* Punkt, elementar ohne Kegelschnittslehre; vorher analytisch, ibid. (1847) p. 22 von *Paul Serret,* aber schon vorher *Grunert, Crelle* 4 p. 366. Vgl. Fünfeck.

F. Padula, Annali di Sc. matematiche e fisiche 5 (1854) p. 286. Merkwürdige Sätze über Konstanz der Differenz der Flächeninhalte zwischen einem Polygon und seinem Derivierten. Dazu Verallgemeinerung *R. Rubini, Tortolini* 5 (1863) p. 3.

E. Prouhet, Nouv. annal. 15 (1856) p. 373. Formel für die Fläche des Fünfecks und Siebenecks. Vgl. oben die Fünfecksformel von *Gauß.*

Fz. Heinen, Grun. 29 (1857) p. 474. Winkelsumme.

H. A. Faure, Nouv. annal. 17 (1858) p. 50. Sätze über konstante Flächensummen.

E. Schröder, Schlömilch 7 (1862) p. 55. Über Vielecke mit gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Sternpolygone in der Geometrie.

Christ. Wiener, Über Vielecke und Vielflache (1864) No 4—7, 10—22, Begriff der Diagonalen, aber erweitert.

E. Prouhet, Nouv. annal. (2) 4 (1865) p. 129. Im Kreissechseck ist das Produkt der 3 Hauptdiagonalen ($AA' = e$, $BB' = f$, $CC' = g$)

$$: efg = es_2 s_5 + fs_5 s_6 + gs_4 s_1.$$

G. Dostor, ibid. (1866) p. 73. Umgeschriebenes Polygon; r und Δ als Funktion der Tangenten von den Ecken; hübsch für Drei- und Viereck.

Fz. Unferdinger, Wiener Berichte 67, 627 (1868); Winkelsumme.

C. J. Becker, Schlömilch 14 (1869) p. 65. „Unter planem Polygon verstehe ich eine von geraden Linien vollständig begrenzte, überall zusammenhängende (*Riemann*) ebene Fläche p. 337. Nachtrag: Jedes einfache ebene oder windschiefe n Eck läßt sich durch $n-3$ Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerschneiden, wobei ganz einerlei ist, wie die Diagonalen gezogen werden, wenn sie sich nur nicht schneiden (dabei muß für windschiefe Polygone das Polygon als Fläche aufgefaßt werden).

G. Affolter, Beiträge zur Geometrie der Vielecke, Programm Solothurn (1870).

Ant. Steinhauser, Grun. 52 (1870) p. 294; Winkelsumme eines Sternpolygons.

Chr. Nagel, Grun. 53 (1871) p. 378; Sätze von *A. Prouhet*, ohne sie zu kennen; hübsche Konstruktion des Neunecks aus den Seitenmitten; *R. Most*, ibid. p. 26. Über die Winkel, welche die von einem Punkt nach den Seitenmitten gezogenen Strecken mit den Seiten bilden.

V. Mollame, Battaglini giornale 9 (1871) p. 64. Polygon, das einem Kreis O umschrieben; Berührungspunkt B_k auf Seite s_k; beliebig M mit den B_k verbunden, so ist $\Sigma MB_k^2 s_k = f(OM)$ [*Stewart*, General theor.]. 2. In jedem ebenen oder windschiefen Polygon ist die Summe der Quadrate der Strecken, welche die Mitten jeder Kombination der Ecken zu zweien verbinden, $\frac{1}{8}(n-1)(n-2)D$, wo D die Summe der Quadrate der Seiten und Diagonalen. (Schwerpunktssatz.)

F. J. E. Lionnet, Nouv. annal. (2) 13 (1873) p. 331 wie *C. J. Becker* ohne die Einschränkung, aber mit Zusatz, daß jedes P (ohne Doppelpunkt) mindestens 3 nicht überstumpfe Winkel haben muß.

E. Hain, Grun. 57 (1874) p. 218. Über das Diagonalenfünfeck eines Kreisfünfecks. Ist α_i das mittlere Stück des Winkels, so ist $\Sigma\alpha_i = \pi$.

G. Dostor, Grun. 63 p. 433. Sternpolygone. Fläche der sphärischen Sternpolygone; *Bourget* (1877) p. 289, p. 424; Des polygones égrédients et des polygones étoilés, und *Liouville* (3) 6 (1880) p. 343; Théorie générale des polygones étoilés, durchaus elementar z. B. der Beweis der *Poinsot*schen Formel für die Winkelsumme $2(n-2p)$ Rechte, wo p die Zahl der Umdrehungen bedeutet.

E. Heß, Über gleicheckige und gleichkantige Polygone; Kassel (1874); (s. darüber *Brückner* 1900), eine über die verschiedenen Arten der Polygone umfassend handelnde, grundlegende Arbeit.

J. W. L. Glaisher, Messenger (2) 9 (1880) p. 133 und Nouv. correspond. (1880); Verallgemeinerung des Satzes von *Mecch* aus The Analyst 5 (1878) p. 8 übers Dreieck: Wenn ein Polygon von n Seiten einem Kreise r umschrieben ist, und α, β, γ etc. die Verbindungen der Ecken mit dem Zentrum, dann läßt sich in einen Kreis mit Radius $\frac{\lambda}{r}$, wo λ beliebig, ein Polygon einschreiben mit den Seiten $\frac{\lambda}{\alpha}$, $\frac{\lambda}{\beta}$ etc., so daß, wenn n gerade, ein geschlossenes Polygon entsteht, und wenn n ungerade, die Enden durch einen Halbkreis getrennt sind. Beweis einfach trigonometrisch.

L. Certo, Battaglini 23 (1885) p. 356, Sui poligoni plani semplici, darin Beweis des *Prouhet*schen Satzes p. 366; id. ibid. 26 (1888) p. 46 sull' n-agono inscritto isoclino, vgl. *Steiner, Crelle* 24 und *Rud. Sturm, Crelle* 96.

J. Schick, Grundlage einer Isogonalzentrik, Programm Tübingen (1889); Erweiterung der Fußpunktspolygone; indem er das Polygon gewissen Bedingungen unterwirft, sucht er den Ort der Pole und gelangt zu zahlreichen Lagenbeziehungen merkwürdiger Punkte im Dreieck und zu metrischen Relationen aller Art.

L. F. Ibach, Nouv. annal. (3) 2 (1883) p. 226; Note sur une famille de polygones.

R. Hoppe, Grun. 61 (1878) p. 439; Bestimmung der Polygone durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen. Vielecke, deren Höhenlote sich in *einem* Punkte schneiden, Bedingungen abgezählt.

R. Hoppe, Grun. (2) 8 p. 447.

M. Klose, *Schlöm.* 31 (1886) p. 61; zugleich ein- und umgeschriebene Fünfecke, *Möbius'* Nullsystem; *Desargues'* Konfiguration.

G. Bernardi, *Battaglini* 29 (1891) p. 63; Erweiterung *Carnot*scher Sätze, Beweis p. 173 (eben und sphärisch).

A. Schoenflies, *Clebsch* Annalen 42 p. 377; über geradlinige Polygone.

Zusammenfassende Werke:

Historisch:

Sig. Günther, vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik Leipzig (1876) Kap. 1. (*G.* hat u. a. auf *Meister* aufmerksam gemacht.)

R. Wolf, Die Lehre von den geradlinigen Gebilden in der Ebene, z. B. die verschiedenen Arten der Fünf- und Sechsecke behandelt, überhaupt die allgemeinen Vielecke. 2. Aufl. 1847.

Ch. Wiener, Über Vielecke und Vielflache; Leipzig (1864).

O. Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, Leipzig (1887).

Max Brückner, Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte, Leipzig (1900).

Die drei letzten gehören allerdings nur zum kleinen Teil in die Elementargeometrie (vgl. auch Polyeder).

Robert Moon, Cambridge and Dublin 5 (1850) p. 131. Verbindet man die Endpunkte der Diagonalen eines Fünfecks mit irgend einem Punkt der Ebene, so ist die algebraische Summe der 5 Dreiecke gleich dem Sternfünfeck der 5 Diagonalen plus dem Kern desselben, und analoge Sätze gelten für jedes ungerade n - Eck.

A. de Morgan macht p. 133 aufmerksam, daß ein analoger Satz auch für gerade n-Ecke gilt, gibt dann eine Note: Extension of the word *Area* p. 139 (nicht elementar), und *William Thomson*, der diese Note kannte, gibt p. 137 einen Zusatz zu *R. Moon*.

A. German, Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers *M. Faulhaber*, Programm Ulm (1873) (vgl. *Möbius*, *Crelle* 3 p. 115). Sehr verbessert von *S. Günther*, Erlanger phys.-med. Sozietät. (1874) 9.

V. N. Bitonti, *Battaglini* 8 (1870) p. 96. Satz 3 ohne Beweis: Zerlegt man ein Sehnenvieleck von irgend einer Ecke aus durch Diagonalen in Dreiecke, so ist die Summe der Inkreisradien konstant.

Th. Muir, Edinburgh M. S. proceedings 2 (1884) p. 8. Note on a theor. connected with the area of a $2n$ side polygon; Ecken: $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, Mitten der Seiten:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}, \text{ so ist } \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \frac{1}{2} A_1 A_2 \ldots A_{2n} + \frac{1}{4} A_1 A_3 \ldots A_{2n-1} + \frac{1}{4} A_2 A_4 \ldots A_{2n}.$$

R. E. Allardice, Edinb M. S. proceed. 5 (1886) p. 28; the equilateral and the equiangle polygon; idem 9 (1891) p. 11. Die größte Linie, welche 2 Punkte auf dem Umfang eines Polygons verbindet, ist Seite oder Diagonale des Polygons.

G. Brunel, Bordeaux mémoires (4) 6 (1894) p. 273. Note über die Zahl der Doppelpunkte des Perimeters eines Polygons.

L. Ferrari, Periodico (1895) p. 141. Trasversali nei poligoni (s. Transversalen).

F. Allgemeine ebene Konfigurationen.

23. Ähnlichkeit. Die Ähnlichkeit steht in engstem Zusammenhang mit der Lehre von den Proportionen (s. d.). Die Erklärung der Ähnlichkeit von *Euklid* ist fast von allen Lehrbüchern beibehalten, auch von *Legendre* noch in der 15. Aufl. (12.), was ich gegenüber der Note bei *Loria,* Della varia fortuna di *Euclide* bemerke. *Legendre* und seine Bearbeiter, z. B. *Blanchet,* ja noch *Rouché* in der letzten Auflage schlossen sich gerade in der Ähnlichkeitslehre besonders eng an *Euklid* an.

Leibniz, Gerhard 7 (1863) p. 30 (nach Hannoverschem Manuskript) hat in wunderbarer Übereinstimmung mit *Bolzano,* Betrachtungen (1804) p. 9 § 16 die Ähnlichkeit definiert: Similia sunt in quibus per se singulatim consideratis inveniri non potest, quo discernantur. Referent hat dies in den Elementen der Geometrie von 1890 kurz formuliert: Ähnliche Figuren sind solche, welche sich nur durch Abänderung des Maßstabes unterscheiden. *Duhamel*, Des méthodes T. 2 benutzt das Ähnlichkeitszentrum zur Definition, geht also von ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren aus und ihm ist z. B. *Giudice* gefolgt, ohne es zu wissen. Aber lange vor *Duhamel* findet sich dieselbe Definition in *Tellkampf*'s Vorschule der Mathematik (1829). *Jacobi* (*van Swinden*) verbesserte die *Euklid*sche Definition, welche, wenn die ursprüngliche Figur gleiche Winkel enthält, fehlerhaft wird, durch den Zusatz, daß die proportionalen Seiten auch noch gleichen Winkeln gegenüber liegen müssen; er bemerkt aber selbst, daß damit noch keine völlig befriedigende Definition gewonnen sei.

Die Reihenfolge der vier Ähnlichkeitssätze richtet sich auch noch in den neuesten deutschen Lehrbüchern, z. B. *Thieme* (1902), *Mehler*, *Cambly*, *Spieker*, nach der der Kongruenzsätze, während *Euklid* und *Legendre*, die Engländer z. B. *Nixon* (1899), die Amerikaner z. B. *Phillipps* und *Fischer* (1899), die neuesten Franzosen z. B. *Rouché* mit *Euklid* den Hauptähnlichkeitssatz (Winkel) an die Spitze stellen. Eine eigenartige Behandlung ist bei *Faifofer*.

Bei *Henrici* und *Treutlein* liegt sie nur darin, daß sie die Ähnlichkeit der projektiven Beziehung unterordnen. Referent drängt die ganze Ähnlichkeitslehre in den einen Satz zusammen: In zwei Streifen stehen je zwei entsprechende Querstrecken im gleichen Verhältnis.

Der grundlegende Satz *Euklid* (6) 2, den *Euklid* und *Legendre* auf (6) 1 stützen, wird seit der Mitte des Jahrhunderts meist auf die Teilungsaufgabe zurückgeführt, auch in Frankreich und Amerika, nur England scheint die schönen *Euklid*schen Beweise zu bewahren. Eine

Zeitlang war es nicht selten, den Satz (6) 2 als Spezialfall des *Menelaos* zu beweisen, der dann seinerseits mit (6) 1 bewiesen wurde.

Die Benutzung der Ähnlichkeit zur Abbildung von Figuren in geändertem Maßstabe ist sehr alt (Ägypter!) und wurde durch den Proportionalitätszirkel handwerksmäßig; doch scheint zuerst *Euler* ausgesprochen zu haben, daß je zwei ähnliche Figuren der Ebene mittels der Drehung um einen bestimmten Punkt dem Centrum similitudinis, Ähnlichkeitszentrum, als Abbildungen voneinander aufgefaßt werden können. (Nova acta Petropol. 9 (1777) p. 54.)

Als Methode geometrischer Konstruktion mittels Konstruktion einer ähnlichen Figur und Abänderung des Längen- bezw. Flächenmaßes (vierte bezw. dritte Proportionale) ist die Ähnlichkeit auch schon den Alten bekannt gewesen, und Konstruktionen, wie die in einen Sektor ein Quadrat zu beschreiben etc., sind auch schon seit unbekannter Zeit mittels Abbildung vom Ähnlichkeitszentrum aus bewirkt worden und haben nicht erst darauf gewartet, daß man die Methode „Multiplikation" taufte.

Von Lehrbüchern, welche das Ähnlichkeitszentrum *Euler*'s berücksichtigen, erwähne ich *H. Vincent*, Cours de géométrie (1827) als das früheste mir bekannte. *Hachette*, Correspond. *Quetelet* 7 (1832) p. 84 verallgemeinert den Satz von „*Chasles*" über das Ähnlichkeitszentrum: Zwei kongruente Figuren F und F' sind in der Ebene gegeben, kontinuierlich oder diskontinuierlich, so gibt es stets einen Punkt I, so daß F um I gedreht in die Lage F' kommt. Das Ähnlichkeitszentrum der Kreise war schon *Viëta* und *Fermat* bekannt (s. Taktion).

Jakob Steiner, Geometrische Konstruktionen (1833) § 11 hat die Ähnlichkeitsabbildung benutzt, um in einfachster Weise die wichtigsten Sätze über den *Feuerbach* (s. d.) und über Kreisvierecke (s. Viereck) zu beweisen. Diese Schrift hat die Aufmerksamkeit stark auf die Abbildung gelenkt.

Larrouy, Essai d'une nouvelle théorie de la similitude des figures géometriques. Paris (1835).

C. Th. Anger, Betrachtungen über verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie, Heft 1 (1839) Danzig.

G. B. Marsano, Memoria sui triangoli simili. Genova (1846).

Rochat, Gerg. 2 p. 93. Ein Dreieck, das einem von zwei ähnlichen Dreiecken umgeschrieben und dem andern eingeschrieben ist, ist mittlere Proportion zwischen beiden; wieder entdeckt von *Hopps*, Education times (1842).

Correspond. *Quetelet* 1 (1825) p. 5 und p. 114: Vier Ähnlichkeitssätze in allgemeinster Fassung, Auszug von *Garnier*; p. 5 trigonometrisch! p. 114 geometrisch von *Sluys* (schon früher *van Swinden*).

M. E. Midy, Nouv. annal. 3 (1844) p. 77. Über Bewegung des Ähnlichkeitszentrums.

v. Holleben und *Gerwien*, Aufgabensammlung von 1832; desgl. *E. Bobillier*, Éléments de géométrie (1832) und *C. F. A. Jacobi* (*van Swinden*) (1834) enthalten sehr viele Sätze und Aufgaben über Ähnlichkeit. Etwas später ist *La Frémoire*, (1843) Théorèmes et problèmes, das später mit *Catalan* und schließlich nur von *Catalan* immer wieder erweiterte, oft zitierte Werk.

Aus der gleichen Zeit stammen die Werke von *C. Adams.*

Eine wichtige Schrift ist die von *Rich. Baltzer*, Über Gleichheit und Ähnlichkeit der Figuren und die Ähnlichkeit derselben; Dresden (1852) und (Auszug) *Crelle* 52 (1856) p. 142.

H. Hoffmann, Danzig (1847), *Grun.* 9 (s. Dreieck). Die Aufgabe: Das größte Dreieck von gegebener Form in ein anderes zu zeichnen s. *Gergonne*'s Annalen 1 und 2. Die Aufgabe, um ein Viereck ein Viereck von gegebener Form zu zeichnen, ist sehr elegant gelöst von *J. Neuberg* in *Catalan*'s Théor. et probl. 6. Aufl. (1879) p. 185:

J. O. Gandtner und *K. F. Junghans*, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen Berlin (1859), wo *Holleben* und *Jacobi* verwertet sind.

R. Townsend, Chapters of modern geometry (1863).

J. Petersen, Nouv. annal. (2) 5 (1866) p. 480. Wenn eine Figur ihre Form bewahrt und sich so bewegt, daß drei ihrer Geraden durch einen festen Punkt gehen, so alle anderen (Inversion, reziproke Satz).

J. Falke, Über eine neue Behandlung der Ähnlichkeits- und Kongruenzsätze, Programm Arnstadt (1875).

E. Cesàro, Nouv. correspond. 6 (1880) p. 377. Man gibt in der Ebene eines Dreiecks a, b, c ein ähnliches mit parallelen Seiten und den Abständen x, y, z, so ist $ax + by + cz$ konstant.

Ch. Laisant, Théorie et application des equipollences, Paris (1888). Wenn man durch einen festen Punkt Linien zieht, parallel und gleich denen, welche die homologen Punkte zweier ähnlichen Polygone derselben Ebene verbinden, so begrenzen die freien Ecken wieder ein ähnliches Polygon.

J. Neuberg, Mathesis 1 (1881) p. 106. Sur les figures semblables, id. Nouv. Corresp. 6, (1879) p. 65, 72, 219, ibid. 2 p. 73. *G. Tarry*, Note von *Neuberg*, vgl. auch *Casey*: A sequel to *Euclid* 5. Aufl. (1889), auch *Midy*, l. c. Sur trois figures semblables (ganz elementargeometrisch). Das Dreieck der drei Ähnlichkeitszentren $S_1 S_2 S_3$ heißt Ähnlichkeitsdreieck und sein Umkreis der Ähnlichkeitskreis. Sätze: In jedem elementaren System von drei Figuren, die direkt ähnlich sind, ist jedes Dreieck von drei homologen Geraden perspektivisch mit dem Ähnlichkeitsdreieck und der Ort der Zentren ist der Ähnlichkeitskreis. Es gibt unzählig viele Triaden zusammenlaufender homologer Geraden (*Petersen*) und sie drehen sich um drei feste Punkte $P_1 P_2 P_3$ auf dem Ähnlichkeitskreis und ihr gemeinsamer Punkt liegt auch auf dem Ähnlichkeitskreis. Das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ heißt invariabel und ist dem Dreieck irgend dreier homologer Geraden invers ähnlich und liegt mit dem Ähnlichkeitsdreieck perspektiv und die Abstände des Zentrums von den Seiten von $P_1 P_2 P_3$ sind den Grundverhältnissen umgekehrt proportional etc.

J. Neuberg, ibid. 5, Supplement; Sur les figures semblables variables; id.: London Math. society proceed. 16 (1885) p. 184; Nouv. annal 17 p 48; Mathesis 6 p. 97, 148, 196; *G. Tarry*, Sur les figures semblables associées; ibid. 7 p. 161, *R. H. van Dorsten*, Application des propriétés trois figures semblables. *J. Casey*,

p. 14, Trois figures semblables; ibid. 14 p. 169 *Neuberg*; ibid. 16 p. 81, *Jeřabek* (Brünn); Figures à la fois semblables et homologiques; darin Beweis des Satzes von *P. Sondat* Intermédiaire 2 (1895) p. 202 (vgl. Mathesis 15 p. 265): Wenn zwei homologe Dreiecke ihre Seiten senkrecht zueinander haben, so hälftet die Achse der Homologie den Abstand der beiden Orthozentren.

Dorlet, Bourget 18 (1894) p. 241, Ähnlichkeit im Raume; die elementarsten Sätze p. 241. Fortsetzung: id. ibid. p. 100; Gleiche Figuren, sechs Eigenschaften der drei Symmetrischen zu einer Figur in bezug auf die drei Seiten von ABC, gleiche Figuren im Raume, Rotationsachse. Ibid. p. 195 *F. J.*, Vier Methoden zur Bestimmung des Ähnlichkeitszentrums (453 tracés); ibid. p. 79 *G. Tarry*, Sur le déplacement de trois figures semblables.

F. Viaggi, Battaglini 28 (1890) p. 113. Sulla similitudine de triangoli appartenenti a due serie.

P. H. Schoute, Comptes rendus 111 (1870) p. 499. Sur les figures planes directement semblables; id. Théorèmes générales etc. (Sätze von *Baltzer, Petersen, Casey, Burmester*).

J. Griffiths, London proceed. 24 (1893) p. 181; Note on the centres of similitude of a triangle of constant form inscribed in a given triangle; dito circumscribed, ibid. p. 369.

Sarah Marks, Education times 60 (1894) p. 622.

E. Cominotto, Periodico 1 (1895); 2 (1896) p. 59. Una dispositione particolare dei triangoli simili.

Inversion und Ähnlichkeit in eigenartigem Dualismus betrachtet von:

J. Mackay, Edinb. proceed. 6 (1887) p. 69.

C. W. L. Barlow and *G. H. Bryan*, Geometry of the similare figures and the plane (1895).

Es muß zum Schluß auf die axiomenkritische Behandlung der Kongruenz- und Ähnlichkeitslehre durch *Veronese, Ingrami, Hilbert* etc. hingewiesen werden. Die Gültigkeit des *Euklid*schen Beweises für den ersten Kongruenzsatz ist oft und schon früh angezweifelt worden. Ich erwähne *E. Bonnesen*, l'enseignement 6 (1904) p. 284: Remarques sur l'idèe de congruence.

24. **Teilung der Strecke.** Von der harmonischen Teilung und Involution als im wesentlichen zur projektiven Geometrie gehörig sehe ich hier fast völlig ab und treffe aus der unendlichen Fülle eine Auswahl. Grundlegend für den Begriff des Streckenbruchs ist *Helmholtz*, Zählen und Messen, Festschrift für *Ed. Zeller* (1887) p. 17, zusammentreffend mit *Felix Klein*. Zuerst hat *Legendre* den Streckenbruch als Zahlenbruch aufgefaßt, siehe auch *J. Knar*'s Anfangsgründe von 1829. Der Begriff des Verhältnisses gehört mehr der Arithmetik als der Geometrie an, und daher hat sich z. B. *Stolz* (*Gemeiner*) in seinen bekannten Vorlesungen und *H. Weber* im 1. Band seiner Enzyklopädie ausführlich damit befaßt.

Da die Inkommensurabilität und damit das *Archimed*ische Prinzip

zu Bedenken Veranlassung gibt, hat *J. Mollerup*, Kopenhagen, in einer interessanten Arbeit im Anschluß an *Hilbert's* Grundlagen die Proportionen in den Annalen 56 (1903) p. 277, axiomenkritisch behandelt ohne den Begriff „Verhältnis" zu definieren. Aber schon zehn Jahre vorher hat *E. Kupffer*, Dorpater Naturforschergesellschaft (1893) p. 373 beide Klippen vermieden, wie auch *A. Kneser*, Sitzungsberichte der Berliner mathem. Gesellschaft 1 (1902) p. 4. Auf *Kupffer* macht *F. Schur*, Zur Proportionslehre, Annalen 57 (1903) p. 205 aufmerksam.

Sehr eingehend ist die Behandlung der Proportion bei *J. de Gelder*, Éléments de géométrie 2. Aufl. (1817); siehe auch aus dem Nachlaß von *Leibniz*, *Gerhardt* Bd. 7, De magnitudine et de mensura und De ratione et proportione, vgl. auch *Eug. Argenti*, Teoria delle mesura e della proportionalità (1871).

a) Teilung überhaupt:

Gergonne (*P. F. Sarus*), *Gerg.* 15 p. 93—97 ohne Parallelen *sehr brauchbar* für die Schule *M. A. Voruz*, Bibliothèque universelle (1824) Mai. Vierte Proportionale: *J. Weihrauch*, *Grun.* 46 (1886) p. 337 (Zusammenhang mit Höhenschnittsatz).

M. Sternberg, *Grun.* 69 (1883) p. 215 ($^1/_7$) einfach (eine Halbierung).

Die elegante Auffindung des $n+1$ Teilpunkts, wenn der $n$te gegeben ist, z. B. bei *Strempel*, Programm 1903 s. Trisektion, findet sich schon bei *Meibomius*, vgl. Cambridge 2 (1841) p. 47.

Vierte Proportionale mit dem Zirkel allein (*Mascheroni*) *Delahaye*, Mathesis 12, p. 157 (Kreise um O mit a und b, Sehne BB' des Kreises a gleich c, um B und B' Kreise mit beliebigen aber gleichen Radien schneiden, den Kreis b in m und m', so ist $a : b = c : mm'$, da Dreieck $BOm \cong B'Om'$, also $BOB' \sim mOm'$.)

A. Leschevain (vor *Steiner*, nach *Brianchon* und *Ch. Sturm*), Correspondance *Quetelet* 2 (1826) p. 253; Strecke halbieren mit Lineal bei gegebener Parallele und *v. v. Brianchon*, Application de la théorie des transversales, Paris (1818) p. 37; *Sturm*, *Gerg.* 16 (1826) p. 265; *J. Steiner*, Geometrische Konstruktionen (1833).

Strecke in Abschnitte, die sich verhalten wie $a^n : b^n$ (Winkelhalbierende), *F. Burnier*, Nouvelles annales (2) 11 (1872) p. 141 $a^3 : b^3$; *Gerono* $a^4 : b^4$ etc. $a^n : b^n$ (projiziert man im rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b ihre Projektionen auf die Katheten usf., so ist bei der $n-1$ Operation $p_{n-1} : q_{n-1} = a^n : b^n$).

Maurice d'Ocagne, Nouv. annal. (3) 2 (1883) p. 497 n positive oder negative ganze Zahl; wenn n gerade durch Symmediane, ungerade durch Bisektrix; eleganter von *Boubals*, *Bourget* 1(1885) p. 31. *D. Besso*, Periodico 2 (1887) p. 53: Wenn $BA' : A'C = c^\mu : b^\mu$ etc., so schneiden sich AA' etc. in x, so daß $\sum A x^{\frac{\mu}{\mu-1}}$ Minimum.

Mit dem Lineal allein: *Brianchon* und *Steiner* (l. c.).

Mit der fausse-équerre (*Richtscheid*): *J. N. Noël*, Correspond. *Quetelet* 5 (1829) p. 215.

b) Incommensurabilität:

E. de Amicis, Rivista di Peano 5 (1895) p. 110. (Kritik) *E. Léger, Liouville* 1 (1836) p. 93: Die Summe der Reste hat stets eine Grenze z. B. bei Seite und Diagonale des Quadrats ist diese Grenze die halbe Diagonale. *Maurice d'Ocagne, Bourget* (1879) p. 103 $\sqrt{2}$ in Kettenbruch entwickelt durch Potenzsatz (*Hauser*).

c) Mittlere Proportionale:

Die berühmte sogenannte *Gouzy*sche Konstruktion: Nouv. annal. 16 (1857) p. 125; durch *E. Bordage, Bourget* 9 (1885) p. 75 wiedergefunden, schon *Grunert* 2 (1842) p. 328 von *L. A. Kunze* (Weimar), aber sie findet sich schon in einem Brief von *Thom. Strode* vom 3. Nov. (1684), in *Wallis* Algebra ins Lateinische übersetzt, Opera mathematica 1 (1695) p. 299—301, wie *Mackay* bemerkt hat.

$$AB = a, \quad BC = AD = b.$$

Um C und D Kreise mit b, Schnitt in E, so ist AE bezw. BE die mittlere Proportionale (Fig. 24).

Dieselbe Konstruktion; *La Collette*, Mathesis 12 (1892) p. 192, vgl. aber auch *Adams*, Merkwürdige Eigenschaften des Dreiecks (1842) und *Baltzer*, Elemente § 6, 3.

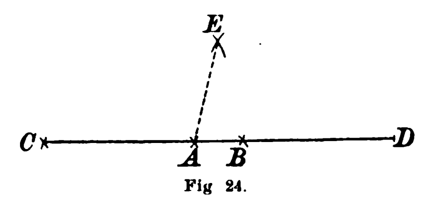


Fig. 24.

Boutin, *Bourget* 10 (1886) p. 250; Gemeinsame Tangente zweier sich von außen berührender Kreise mittlerer Proportion zu den Radien was u. a. Referent seit seiner Schulzeit bekannt war.

Alle drei Proportionen arithmetische, mittlere, harmonische, d. h.

$$2q^{-1} = a^{-1} + b^{-1},$$

O. Terquem, Nouv. ann. 5 (46) p. 376. Des trois moyennes etc. d'après *Puppus.*

Cl. Thiry, Mathesis 11 p. 254. Dritte Proportionale $xb = a^2$, sehr elegant.

d) Der goldene Schnitt:

E. Léger, Correspond. *Quetelet* 9 (1837) p. 483, Verhältnis durch den Kettenbruch [1, 1]. Die Grenze der Summe der Reste bei Aufsuchung des gemeinsamen Maßes zwischen major und minor ist der Major.

Grunert, Grun. 4 p. 15; Analyse des goldenen Schnittes.

A. Zeising, Neue Lehren von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenen und die ganze Natur und Kunst durchdringenden Grundgesetze. Leipzig (1854).

Th. Wittstein, Der goldene Schnitt, Hannover (1874). *L. Sonnenberg,* Der goldene Schnitt, Beitrag zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendungen; Programm Bonn (1881). *A. Zeising,* Der goldene Schnitt, aus seinem Nachlaß, Halle (1884).

F. X. Pfeifer, Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst, Augsburg (1885) geht noch weiter als *Zeising* (*Lamé*sche Reihe 12 358 . . . als Näherungswerte für die goldenen Schnittverhältnisse, der botanische Abschnitt von Wert).

M. Weidenholzer, Grun. (2) 4 (1887) p. 106; *W. Schultz,* Die Harmonie in der Baukunst, Hannover (1891); *Bernès*, *Bourget* 17 (1893) p. 132; *E. Lemoine*,

desgl. p. 130; *Cl. Thiry*, Mathesis 14 (1894) p. 22 (Einige Eigenschaften etc.). *Schöttler*, Über eine mit dem goldenen Schnitt im Zusammenhang stehende Kreisgruppe, Progr. Gütersloh 1857.

Historisch:

Luca Pacioli (s. *M. Cantor*), Divina proportione, nach der venetianischen Ausgabe von 1509 herausgegeben, übersetzt und erläutert von *C. Winterberg*, Wien (1896).

J. Petersen, Sectio rationis (*Apollonius*) Methoden und Theorien (*v. Fischer-Benzon* 1879).

F. von Lühmann, Sectio rationis, sectio spatii et sectio determinata des *Apollonius* etc. Programm Königsberg Neum. Nr. 73 (1882).

R. E. Anderson, Edinb. math. society proceed. 15 (1897) p. 65. Extension of the medial section (AB in C, so daß $AB \cdot BC = pAC^2$) (siehe aber *D. H. Emsmann, Hoffmann* 5 (1874) p. 289. Aus Zur Sectio aurea Osterprogr. Stettin 1874).

C. A. Laisant, Edinb. math. soc. proceed. (1899) (1900) p. 99. Problème de la section de raison.

Die vielen Versuche, den für die Schüler schwierigsten Begriff, den des Streckenbruchs, einfacher als *Euklid* und doch streng zu behandeln, gehören in die Philosophie der Mathematik, bezw. fehlen sie in keinem Lehrbuch.

Referent erwähnt *D. Chelini*, Giornale arcadico (1837) Teoria delle quantitate proporzionale (auch historisch).

J. M. C. Duhamel, Éléments de calcul infinites. cap. 1.

O. Stolz, Insbrucker Berichte 12 (1882) p. 74. Zur Geschichte der Alten, insbesondere über das Axiom des *Archimedes*. *N. Trudi, Battaglini* 1 (1863) p. 337 (Rettung *Euklid*'s; *R. Hoppe, Grun.* 62 p. 153, vgl. 55 p. 50, rein geometrische Proportionslehre. *Messenger* 2 (1873) p. 155: The treatise of proportion by the association for the improvement of geometrical teaching (*Glaisher*), Bericht der Kommission für den „Syllabus", eine Einigung kam nicht zustande; *Glaisher* gibt die einzelnen Referate. *Sana e d'Ovidio*, Elementi di geometria 2. edit. Napoli (1870). *Faifofer*, Element. di geom. 3. Aufl. (1882); *G. Peano*, Element. di geom. Mathesis 10 (1889) p. 73. *E. Bettazzi*, Periodico 7 (1892), La definizione di proporzione ed il 5. libro di *Euclide*; *Max Simon* (Straßburg i. Els.), Elemente der Geometrie etc. (1890) p. 72; *J. M. Hill*, Education times 63 Nr. 13466, Beweis für *Euklid* 5 Prop. 9, 16, 22, 23, nur mit Sätzen über *gleiche* Verhältnisse. Auf die Lehre von den Proportionen im englischen Unterricht hat großen Einfluß geübt *De Morgan*, Connexion of number and magnitude.

H. Dobriner in seinem „Leitfaden" (1898) versucht den Begriff der Proportion durch den der Flächengleichheit zu ersetzen, wie lange vor ihm *Essen, Grun.* 22. Die Irrationalität zu vermeiden, versucht *A. Ramsay*, Helsingfors, Pedag. förening. tidscrift (1884); Proportionsläran i geom.

G. J. Hoüel, Nouv. annal. (1871) p. 289 schlägt vor: Zwei Größen x und $\varphi(x)$ sind proportional, wenn $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

Hierher gehört auch zu dem *Euklid*schen Beweis (bezw. *Aristoteles*) der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats der von Höhe und Grundlinie des gleichseitigen Dreiecks $\sqrt{3}$; *Max Simon*,

Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie (1890), aber schon bei *Bretschneider, Grun.* 3 (1842) p. 440, derselbe Gedankengang.

e) Involution.

A. Jacobi, Crelle 31 (1846) p. 45.

Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie von Dr. *F. August*, Programm Berlin (1872); *Alfred Leman*, Beiträge zum mathem. Unterricht in den Oberklassen, Programm Mülhausen (1898).

Harmonische Teilung, Involutionssatz von *J. J. Walker*, Education. times Nov. (1870), bewiesen von *T. Fuortes, Battaglini* 9 (1871) p. 49. Es sei auch hingewiesen auf *Atan. Lasala*, La theoria de los lineos proporcionales (1880); *R. D. Bohannan*, Annals of mathematics 1 (1885) p. 121; harmonische Teilung, Relation zwischen den 6 verschiedenen Strecken, sehr vollständig; *Dietrich*, Blätter für bayrisches Gymnasial- und Real-Schulwesen (1883) p. 7, Apparat zur harmonischen Teilung.

Es sei zum Schluß hingewiesen auf *Veronese* (1897); *Hilbert*'s Grundlagen der Geometrie (1895) § 15 und 16 und *Ingrami*.

Den Zusammenhang der harmonischen Teilung mit *Pascal* und *Brianchon*, s. *Brianchon* cah. 16 (1806) p. 301 du journal de l'école polytechnique; Sur les surfaces courbes du second degré.

Das Zentrum des harmonischen Mittels (*Maclaurin*), dessen Theorie *Poncelet* in den großen Abhandlungen (nicht elementar) im *Crelle* begründet, elementar von *Köhler, Bourget* (1879) p. 225, 237 etc. Zusammenhang mit der Involution p. 321; dito *Verbessern*, Mathesis 14 (1894) p. 251.

Zur harmonischen Teilung (elementar): *Brianchon*, Mémoire etc.; *Poncelet*, Traité; *J. Garnier*, Théorie élémentaire des transversales (1827); *C. Th. Anger*, Betrachtungen etc. Danzig (1839) 41; *C. Adams*, Die harmonische Teilung, Winterthur (1843); *Schnuse*, Die Theorie der anharmonischen Verhältnisse, die harmonische Teilung und die Involution aus *Chasles*, Traité de géométrie superieur (1856).

E. Catalan, Théorèmes et problèmes; *Rouché* et *Comberousse*, Traité (1864) Appendix 2; *J. Geiser*, Einleitung in die synthetische Geometrie (1869). *F. X. Stoll*, Anfangsgründe der neueren Geometrie (1872). Seitdem äußerst häufig in den Lehrbüchern.

Sehr vollständig harmonische Teilung und Involution bei *J. Casey*, A sequel to *Euclid* (1881) section 3, 4, 6; auch bei *Henrici* und *Treutlein*.

Daß das harmonische Strahlenbüschel im Raume schon von den alten Griechen benutzt wurde, bemerkt *C. Taylor, Messenger* (1881) p. 112.

T. Fuortes. Battagl. 9 (1871) p. 49; Beweis des Satzes von *Walker*, Education times (1870). Seien A, B, C drei Punkte in gerader Linie und $A'A(BC)$; $B'B(CA)$ etc. harmonische Systeme, so ist 1. $AA'(B'C')$ harmonisch etc. 2. Die sechs Punkte bilden drei andere Involutionen, in denen AA', BC, CC' drei entsprechende Paare.

Kobert, Die Harmonikalen, Programm Pyritz (1878).

F. Wrzal, Zeitschrift für Realschulwesen 10 p. 93; Zur Konstruktion des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels (mit Parabel).

Es sei nachdrücklich auf die bedauerlicherweise wenig bekannten Schulbücher von *A. Milinowski* hingewiesen, in denen, wie auch in

seiner Elem.-synthet. Geom. der Kegelschnitte, Teubner 1882, die harmonische Teilung und Verwandtschaft, sowie die Involution sehr ausführlich behandelt ist.

25. Schwerpunkt. Schwerpunkt als Zentrum der mittleren Entfernungen ist wohl zuerst von *L'Huilier* in der Polygonometrie und von *Carnot*, Géométrie de position geometrisch behandelt, analytisch ist er bestimmt als Punkt, dessen Koordinaten den Durchschnittswert derer der Punktmenge haben; daß der Schwerpunkt auch elementargeometrisch behandelt werden kann, sehe man z. B. in *Catalan*'s théorèmes et problèmes. Der Name „Centre des moyennes distances" findet sich zuerst bei *Carnot* (Corrélation (1801) Nr. 209) und in den folgenden die Theorie, Nr. 213 die Hauptformel

$$\sum \overline{OA_k}^2 = \sum \overline{SA}^2 + n\,\overline{SO}^2,$$

bezw. wenn

$$O = A_i, \quad \sum \overline{A_i A_k}^2 = n \sum \overline{A_k S}^2.$$

Bertoth, Correspond. *Hachette* (école polytechnique) 1 (1807) p. 229. Die *Lagrange*schen Sätze: Mémoire de Berlin (1783) p. 290

$$\sum \alpha_k \overline{OK_k}^2 = \left(\sum \alpha_i \alpha_k \overline{A_i A_k}^2\right) : \sum \alpha_k - \overline{OS}^2 \sum \alpha_k \text{ etc.},$$

wo α_i beliebige Faktoren (Massen).

Blondat, ibid. 2 Nr. 3 (1811) Jan. p. 267; elementar. *Guldin*sche (*Pappus*) Regel. Satz über das Volumen des schräg abgeschnittenen Prisma bezw. Zylinder.

F. J. Servois, 12 p. 17 der Solutions peu connues (*Ozanam*sches Problem). Verbindet man die Mitten eines Dreiecks und wiederholt diesen Prozeß fortwährend, so ist die Grenze S; von:

Querret, *Gerg.* 14 p. 378 schlagend einfach auf beliebige Vielecke ausgedehnt, vgl. dazu *J. G. Darboux*, Bulletin *Darboux* (1878) p. 289. Sur un problème de géométrie élémentaire.

O. Bérard, *Gerg.* 3 p. 192; Schwerpunkt des Vierseits und vierseitiger Pyramide; ders. opuscula mathem. Paris (1810), Bestimmung für Polygone. *L'Huilier*, *Gerg.* 3 p. 196, Schwerpunkt einer Doppelpyramide, der, *Gerg.* 2 p. 72, den Schwerpunkt des sphärischen Dreiecks, (aber nicht elementar) behandelt hat.

C. C. Gerono, *Gerg.* 17 p. 330; der Schwerpunkt der Oberfläche des Tetraeders ist das Zentrum der Inkugel.

Ch. J. Brianchon, *Liouville* 4 (1839) p. 386; Note sur le centre de gravité du tronc de prisme. Alle Mitten der parallelen Kanten liegen in *einer* Ebene und in ihr liegt der Schwerpunkt.

Ch. Jgn. Giulio, *Liouv.* 4 (1839) p. 345; Sur le centre de gravité d'une portion quelconque de surface sphérique. Die Höhe des Schwerpunktes über der Ebene irgend eines Hauptkreises der Kugel verhält sich zum Radius wie die Projektion der Fläche zur Fläche selbst (Integralrechnung).

L. S. Ferriot, *Liouv.* 7 (1842) p. 59 (elementar) Der Schwerp. des sphärischen Dreiecks und sphärischer Pyramide (Kugelsektor), aber ibid. p. 516 zeigt *Besge* die Inexaktheit und beweist die Formel von *Giulio* einfach.

E. Brassine, Liouv. 8 (1843) p. 46; Centre de gravité de l'aire et du contou d'un polygone circonscrit.

Grunert, Grun. 3 (1843) p. 61; Schwerpunkt der Kugelzone in der Mitte der Achse.

Franz Seydewitz, ibid. 8 (1846) p. 174. Über einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung. *I. J. Eschweiler,* ibid. 3 p. 3; Schwerpunkt eines Polygons aus den Koordinaten seiner Ecken; p. 6, Schwerpunkt eines sphärischen Dreiecks bezw. Sektors (elementar).

A. Watelet, Nouv. annal. 7 (1848) p. 441. Schwerpunkt eines Systems von n Punkten, zugleich der der S_n der n darin enthaltenen $(n-1)$ Ecken.

J. Walker, Quarterly journal 9 (1868) p. 36; Schwerpunkt des Vierecks und Trapez; N Mitte von BD, M von AC, $AP = CO$, $BQ = DO$; so liegt der Schwerpunkt S im Schnitt von QM und NP. Für Trapez: Man verlängert jede Parallele nach beiden Seiten um die andere und verbindet über Kreuz, so ist S der Schnittpunkt. Der Hauptsatz schon bei *Bérard.* (Fig. 25.)

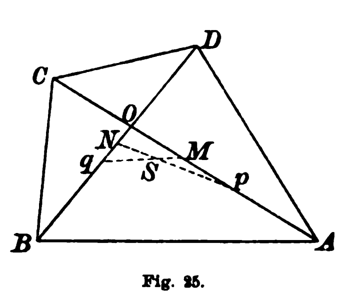


Fig. 25.

R. Most, Grun. 49 (1869) p. 357. Schwerpunkt der Doppelpyramide, des Pyramidenstumpfes und der schief abgeschnittenen Pyramide ganz elementar; idem p. 355 beliebiges Polygon und Polyëder (Verschiebung des Schwerpunktes wenn sich AB im Raum verschiebt).

E. Catalan, Théorèmes et problèmes; Beweis des Satzes von *Lagrange,* bezw. *Carnot* und die schon bei *Carnot* und *Meyer Hirsch* (geometrische Aufg. 2 (1807) p. 336) gezogene Folgerung, daß, wenn $\sum OA_k^2$ konstant gleich K^2, der Ort von O ein Kreis um S mit Radius R, so daß

$$nR^2 = K^2 - \sum \overline{SA_k}^2,$$

z. B. 6. Aufl. (1879) p. 87; s. auch *Casey,* A sequel to *Euclid* (1881) p. 25 etc.

K. Fresenius, Hoffmann 5 (1874) p. 112; Geometrische Bedeutung des Schwerpunktes.

R. Tucker und *Kitchen,* Education times (4148) 20 (1874) p. 62 und 63; Legt man in den Ecken ABC und den Höhenfußpunkten P, Q, R, Massen proportional $\sin^2 A$ etc., $\cos^2 A$ etc., so fällt ihr Schwerpunkt mit dem des Dreiecks zusammen.

Ch. Laisant, Nouv. correspond. 2 (1875) p. 64; A, B, C, etc. G ihr S, R irgend ein Kreis um G, so ist die Summe der Potenzen des Kreises R in A, B, C, etc. gleich $GA^2 + GB^2 + \cdots$

G. Dostor, Nouv. correspond. 6 (1879) p. 187; Konstruktion des Schwerpunktes des Umfangs eines beliebigen Vielecks.

Victor Schlegel, Schlömilch 21 p. 450; Grundeigenschaften des Schwerpunktes in Ebene und Raum (*Graßmann*'s Ausdehnungslehre).

R. Hoppe, Grun. 64 (1879) p. 439; Schwerpunkt eines Vielecks.

P. Johnen (im *Grunert* steht irrtümlich *Jolmen*), *Grun.* 65 (1880) p. 221; E sei Schnitt der Diagonalen $CE = AF$, Dreieck BDF, denselben Schwerpunkt wie $ABCD$, aber schon Anonymus, Quart. journ. 6 (1864) p. 127 vgl. dazu Note von *J. J. Sylvester* p. 130. (Fig. 26.)

F. X. Stoll, Grun. 65 (1880) p. 440. Schwerpunkt des Vierecks.

J. P. Weinmeister, Hoffmann 18 (1887) p. 107; Schwerpunkt des Mantels des schiefen Zylinders.

E. Cesàro, Nouv. correspond. 6 (1880) p. 472. Verallgemeinerung des Satzes von *Pappus* (*Chasles,* Aperçus p. 44). Ein Dreieck, dessen Ecken die Seiten eines Dreiecks gleichmäßig in gleichen Verhältnissen teilen, hat denselben Schwerpunkt, ibid. von *J. Neuberg* auf beliebige Polygone ausgedehnt, aber derselbe Satz schon von *Ch. Laisant,* Kongreß zu Havre der association franç. pour l'avancement des sciences (1877), vgl. dazu auch *Résal,* Nouv. annal. (2) 20 (1889) p. 337. Der Satz ist ein Spezialfall des Satzes von *Haton de la Goupillière* (s. u.). *Cesàro* und *Neuberg* bewiesen ihn elementar, *Laisant* mit Quaternionen, vgl. auch *Laisant* und *Neuberg,* Mathesis 1 p. 169; 2 p. 59. *Laisant* verallgemeinert ihn: Bulletin de la société mathém. de France 10 (1882) p. 40 auch auf windschiefe Vielecke und beweist den Satz: Wenn alle Ecken um parallele Achsen rotieren, so verharrt S, dazu *E. Laquière,* ibid. p. 132.

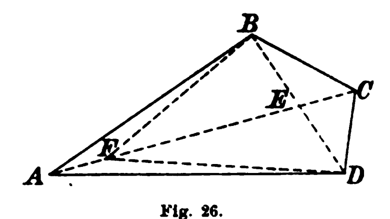


Fig. 26.

R. Hoppe, Grun. (2) 11 (1892) p. 351; Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken.

H. van Aubel, Mathesis 11 p. 255 elementar. Wenn ein Punkt A_1 eine Verschiebung erleidet, A_1B_1, so G nach G_1, so daß $GG_1 = A_1B_1 : n$ und parallel A_1B_1.

Maurice d'Ocagne, Annal. de la société scienc. de Bruxelles Jahrg. 9 (1885—1886) p. 237; *Ozanam*sches Problem, vgl. *Querret.*

J. N. Haton de la Goupillière, Société mathém. de France (1893) 15. Febr. Gegeben irgend ein ebenes Vieleck von n Ecken; man verbindet die Ecken von k zu k und konstruiert auf diesen n Strecken p Ecke, die alle unter sich ähnlich sind, dann ist der Schwerpunkt der np Ecken dieser n Polygone derselbe wie der des gegebenen; mit *Graßmann*scher Ausdehnungslehre beweist ihn *Victor Schlegel* ibid. (1893) 5. April. Vgl. auch seine Arbeit Nouv. ann. (3) 17 (1898) p. 383.

G. Lazzeri, Supplemento al periodico di matemat. (1898), Il baricentro d'un sistema di punti.

A. Mannheim, Bulletin de la société mathémat. de France (1899) p. 148. Schwerpunkt des Trapez und des Dreiecks, gebildet aus der großen Parallele und den Parallelen zu den Diagonalen durch die Enden der kleineren Parallelen fallen zusammen (auch mit PAB); *F. Caspary,* ibid. (1900) p. 143. Beweis und Verallgemeinerung auf jedes Viereck.

Der *Laisant*(*Brocard*)sche Satz, auch der von *Weill* (s. Schließungsproblem) im Kap. 4 von *Mc. Clelland,* A treatise etc. (1891).

*Guldin*sche Regel, s. auch Volumen.

Die *Guldin*sche Regel bei *Pappus,* Collectanea mathem. Einleitung zum 7. Buch (*Klügel*) findet sich ausgesprochen bei *Guldin,* De centro gravitatis (1635—1642), aber nicht bewiesen.

Meyer Hirsch, Geometrische Aufgaben 2 (1807) § 170, 171, 172, verallgemeinert § 176. Wenn irgend eine gerade oder krummlinige Figur sich längs einer geraden, krummen oder doppelt gekrümmten Linie so bewegt, daß sie immer auf der Richtung ihrer Bewegung senkrecht bleibt, so gibt das Produkt der er-

zeugenden Figur in den Weg ihres Schwerpunktes die Fläche des beschriebenen Körpers. Die *Guldin*sche Regel und ihre Verallgemeinerung von § 168 an bis § 193 vielfach zur Volumbestimmung benutzt. Elementarer Beweis der *Guldin*schen Regel bei *Baltzer* 5 § 11 und 13.

G. Dostor, Mathesis 1 p. 157. (Umdrehungskörper.)

G. Königs, Liouville (4) 5 (1889) p. 321 (nicht elementar), Erweiterung der *Guldin*schen Regel; dazu *J. Hadamard,* Bulletin de la société mathémat. de France 26 (1898) p. 264.

Verallgemeinerung des Schwerpunktes (Zentrum der kleinsten Quadrate, Punkt von *Gauß*). *Bertot,* Comptes rendus (1876) 1. Sem. p. 586; *Maur. d'Ocagne,* Journal de l'école polytechnique Cah. 63 p. 7 und 22; *Epsanet,* (*Laisant*) Intermédiaire des mathém. (1899) p. 20; *Duporcq,* ibid. p. 22. *J. Neuberg,* Annales de la société scientifique de Bruxelles 23 p. 26; idem, Nieuw Archief v. Wiskunde (2) 4 (1900). Baryzentrische Podaire etc. dort *Literatur.*

Historisch:

Dom. Piani, Boncompagni Bulletino 1 (1868) p. 41 (ders. Memorie de Bologna 10 (1870).

26. Transversalen. Die Lehre von den Transversalen, begründet durch *Desargues* und *Carnot,* geht allmählich (Géométrie segmentaire) in die projektive Geometrie über, sie stützt sich auf den *Menelaos* und *Ceva,* bezw. auf den Satz vom vollständigen Vierseit und seinen Diagonalen, der schon den Alten bekannt war; noch einfacher auf den *Sinussatz.*

Das fundamentale Werk ist *Carnot,* Essai sur la théorie des transversales (1806) als Suite des mémoire sur la relation etc.; es stammt aber wohl aus 1796 und ein großer Teil der Sätze finden sich in der Géométrie de position, der sogenannte *Carnot*sche Satz vom Schnitt eines Dreiecks bezw. Polygons durch Kreistransversale bezw. Kegelschnitt bezw. Kurve (Potenzsatz) ist Lehrsatz 3 und 4 des essai und 13 der géom. de pos. (2. Teil), bei *Carnot* finden sich ohne historische Notizen *Menelaos, Ceva,* harmonische Eigenschaften des Vierseits, Konstanz der Doppelverhältnisse, alles völlig elementar.

Weitere Ausführung: *A. L. Crelle* (1816); Über einige Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks etc. (*Brocard*scher Punkt). *J. Garnier,* Théorie élémentaire des transversales (1827); sehr reich sind die beiden Werke von *C. Adams,* Die Lehre von den Transversalen, Winterthur (1843) und die harmonischen Verhältnisse (1843). Viel Material auch bei *O. F. A. Jacobi* im Anhang zu *van Swinden* (1834) *Th. Anger* (1839) Danzig Heft 1 und 2; *C. G. Reuschle* (1853).

Von neueren Werken: *F. Geiser,* Einleitung in die synthetische Geometrie (1869). *F. X. Stoll,* Anfangsgründe der neueren Geometrie (1872); *R. Townsend,* Chapters on the modern geometry etc. (1863) t. 1; (1865) t. 2.

Für die Anwendung auf Probleme der Geometrie sind grundlegend:

F. J. Servois, An 12; Solutions peu connues, und *Ch. J. Brianchon*, Application de la Théorie des transversales, Paris (1818), auch als Anhang bei *Adams*, Transversalen.

Der Ansicht *Chasles'*, der nach den Angaben *Pappus'* die Porismata des *Euklid* restituierte, hat sich *H. G. Zeuthen*, Fra mathematiske histor. 2 und 3, *Zeuthen* Tidsskrift (4) 6 (1881) p. 97 angeschlossen, danach enthielten sie die Grundlagen der Transversalentheorie und damit die projektive Behandlung der Kegelschnitte.

Gergonne, Gerg. 9 p. 277, Satz von ihm (*Frégier.* etc.) Ecktransversalen durch Punkt P für Dreieck ABC

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \ldots = 1; \; \left(\frac{PA}{AA'} + \ldots = 2\right)$$

entsprechend für Tetraeder, sehr einfach bewiesen von *Vallès, Gerg.* 12 p. 178.

Vecten, Gerg. 9 (1819) p. 293; eine Reihe von Sätzen über Kollineation für Drei- und Vierecke nach Art des *Menelaos*.

L. A. S. Ferriot, ibid. 17 p. 141; u. a.: 3 Gerade durch P schneiden die Schenkel eines Winkels S in A, A', A''; B, B', B'' sei $(A'B'', B'A'') = C$ etc., so sind C, C', C'' kollinear mit S und umgekehrt (*Pascal*scher Satz.)

Desargues' Satz von den homologen Dreiecken durch Hineingehen in den Raum, *vor Staudt*; *Nerenburger*, Correspond. *Quetelet* 3 (1827) p. 65; durch *Menelaos, Manderlier*, (wie vorher *Servois* l. c.); ders. p. 66, Transversalensatz über Dreiecke auf derselben Basis; ibid. p. 121: Werden über den Seiten eines Dreiecks als Diagonalen Parallelogramme konstruiert, deren anstoßende Seiten zwei festen Richtungen parallel sind, so sind die 3 anderen Diagonalen kollinear. Satz als Frage gestellt, bewiesen von *A. Lechevain*; ibid. p. 123, *T. Olivier*: Wenn auf 3 Strahlen zwei beliebige Punkte auf jeden zu je zwei und zwei verbunden werden, so liegen die 6 Schnittpunkte in *einer* Geraden. (Note von *A. Quetelet*); ibid. 4 (1828) p. 3, Satz von *A. Lévy:* Wenn eine Gerade zwei der Gegenseiten eines windschiefen Vierecks proportional schneidet, so schneidet sie jede Gerade, welche sie und das andere Seitenpaar trifft, im selben Verhältnis; damit Beweis des Satzes von *Bobillier* über die Hälftung der Tetraeder (s. d.); ibid. 8 (1835) p. 56, *Chasles*, Transversalensazt über 2 Strecken im Raum (ganz elementar).

A. Quetelet, Académie Bruxelles (1827) p. 49; eine ganze Reihe von Sätzen über ein- und umgeschriebene Polygone, welche er durch *stereographische Projektion* in reguläre transformiert.

C. A. Jacobi, Anhang zu *van Swinden* (1834) p. 340. (Gleichschenklige Dreiecke über den Seiten etc.); dazu *H. Simon, Hoffmann* 17 (1886) p. 410.

D. Gregory, Cambridge journ. 1 (1839) p. 87, Transversalensätze.

O. Gandtner, Programm Greifswald (1852).

F. Proß, Grun. 18 p. 120 2 nicht uninteressante Sätze.

J. Steiner, Gerg. 19 (1828) p. 37; ohne Quellenangabe der Satz: Liegen die Punkte A', B', C' auf den Seiten A, B, C und ist

$$AB'^2 + BC'^2 + CA'^2 = BA'^2 + CB'^2 + AC'^2,$$

so schneiden sich die 3 Lote in A', B', C' in *einem* Punkte und v. v. und für die Kugel (Note) cos AB' cos BC' cos CA' = cos BA' . . .

O. Schlömilch, Schlöm. 1 (1856) p. 122, reziproke Sätze zum Schwerpunktssatz im Dreieck und *Gauß*schen Satz im Viereck, verallgemeinerter Beweis von *Baur, Schlöm.* 2 p. 192 (*Desargues'* Satz vom vollständigen Vierseit). *Schlömilch*, ibi. 1, p. 317. Beweis des Hauptsatzes der *T*-Theorie.

E. v. Hunyady, ibid. 7 d. 268, *Maclaurin*scher Satz: Wenn durch S von ABC eine Transversale gezogen wird, welche CB in U, BA in W und die Verlängerung von CA in V schneidet, so ist $US^{-1} + VS^{-1} = WS^{-1}$.

F. Geiser, Einleitung etc. (1869).

S. Brauns, Zur Lehre von den Dreieckstransversalen, Programm Schwerin (1859). Jede Ecke mit den 4 Berührungspunkten der Kreise (vgl. *Nagel*).

R. Most, Grun. 50 p. 238; Zur Lehre von den Transversalen im Dreieck und dreiseitiger Pyramide.

E. Netto, Nouv. annal. (2) 8 (1869) p. 518; Beweis der Transversalenaufg.: question 935.

E. Catalan, Théorèmes et problèmes. 6. Aufl. (1879) p. 95. Wenn 3 Gerade von einem Punkt O ausgehend zwei Transversalen in A und A' etc. treffen, so ist $\frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AO}{A'O}$ konstant; von *A. Lasala*, Teoria de las lineas proporc. (1880) verwertet. Der Satz gilt auch sphärisch, übrigens hat ihn vor *Lasala* schon *Kudelka* zur Ableitung des *Menelaos* etc. verwertet (s. *Menelaos*).

Külp, Grunert 56 (1874) p. 457.

E. Hain, ibid. 57 p. 522; Über Parallelentransversalen p. 438.

E. van Aubel, Nouv. correspond. 3 (1876) p. 22; Sei Dreieck $A'B'C'$ so in ABC eingeschrieben, daß AA' etc. sich in J schneiden und M ein beliebiger Punkt, so bestimmen AM etc. auf $B'C'$ etc. 6 Segmente in Involution. Also (Zusatz): 3 Gerade, welche einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Dreiecks mit den Zentren der Ankreise verbinden, bestimmen auf den Seiten 6 Segmente in Involution.

P. Mansion, Messenger 5 p. 158; Transversalensatz im Viereck (Determinanten).

H. Brocard, Nouv. correspond. 6 (1880); *Cauret*, ibid. p. 184; Satz vom Viereck: Zieht man durch die fünfte und sechste Ecke je eine Transversale, so schneiden sie die Gegenseiten so, daß die Produkte von je 4 Wechselabschnitten gleich sind.

Jul. Petersen, *Zeuthen* Tidsskrift (4) 5 (1881) p. 45. Elem. Bev. for *Desargues Sätn.*

*H. Kiehl**), Zur Theorie der Transversalen, Programm Bromberg (1881) (Symmedianen).

Maurice d'Ocagne, Teixeira journ. 6 (1884) p. 125; Études de géométrie segmentaire.

E. Cesàro, Battaglini 22 (1884) p. 240; studio di trasversali.

C. W. Baur, Schlöm. 2 (1857) p. 192. Dreiecktransversalensatz von *Schlömilch*.

---

*) Die reichhaltigen Arbeiten *K.*'s gehören im wesentlichen in die Neuere Dreiecksgeometrie, und sind daher vom Ref. nicht benutzt.

(1, 192): A', B', C', Mitte von B, C^1 sei A_0 etc., so schneiden AA_0 etc. die zugehörigen Seiten kollinear verallgemeinert.

A. Weiler, Schlöm. 24 (1879) p. 248; Satz von *Desargues* über Involution des Vierseits mit 4 Ecken, einfacher, aber projektiver Beweis.

J. Neuberg, Mathesis 7 (1887) p. 245; *Laurens,* Math. 8 p. 17; Reziproker Satz.

Ch. Laisant, Nouv. annal. (3) 11 (1892) p. 209.

L. Ferrari, Periodico di matemat. 10 (1895) p. 141 (*Poncelet-Carnot*).

A. L. Candy, Annals of mathemat. 10 p. 175; 11 p. 10 (1896 — 97). Methode nicht elementar, aber die Sätze von 11 über die Kreissehne sind es.

A. Droz-Farny (Educ. times 1891 Nr. 14111): Mathesis 19 p. 162. Zwei rechtwinklige Transversalen durch das Orthozentrum bestimmen auf den Seiten Segmente, deren Mitten in gerader Linie (Beweis von *Neuberg* mittels einer ABC eingeschriebenen Parabel).

W. Heymann, Hoffmann 30 (1899) p. 90. Satz von *Gergonne* (1819!) über Tetraedertransversalen.

A. Gob, Mathesis 18 (1898) p. 123. Ecktransversalen, welche die Seiten unter gleichen Winkeln Θ schneiden und A', B', C' in Gerader dann ist Θ der Winkel, unter dem sich der Umkreis und der konjugierte, der Kreis um H mit der Potenz, schneiden.

Menelaos, Ceva.

Der *Menelaos* heißt noch bei *La Frémoire* und *Catalan*: Théorème de *Ptolemée*, da *Ptolemäus* die ganze sphärische Trigonometris im Almagest auf den sphärischen *Menelaos* gegründet hatte; erst *Chasles*, Aperçus historiques, Bruxelles (1837) Note 6 (Geschichte des *Menelaos*) hat ihm seinen richtigen Namen wieder verschafft.

Der *Ceva* ist nicht von dem Jesuiten, sondern von dessen Bruder *Giovanni* in De lineis rectis se invicem secantibus, Mediolan. (1678) gefunden. (*Chasles* l. c. Note 7.) Die Schrift ist ein merkwürdiger Vorläufer des baryzentrischen Kalkuls.

Die duale Beziehung zum *Menelaos* ist von *Brianchon*, *Servois* und *Gergonne* erkannt. *Brianchon* hat auch die nahe Beziehung beider Sätze zum vollständigen Vierseitssatz bezw. zum Fundamentalsatz der harmonischen Beziehung erkannt. Da die Sätze unmittelbare Folgen des Sinussatzes sind, wie im Grunde die ganze Transversalentheorie, so gelten sie eo ipso für alle drei Geometrien, insbesondere auch für die Kugel.

Der *Ceva* heißt z. B. noch bei *Servois*: Satz von *Bernoulli*, da *Johann Bernoulli* (op. 4 p. 33 No. 155) ihn wiedergefunden hat wie *Carnot* den *Menelaos*.

F. J. Servois, Solutions peu connues, Metz (1804) beweist beide Sätze.

Carnot verallgemeinert auf beliebige Polygone, auch auf windschiefe und Ebenen als Transversalen. Doch ist der Hauptsatz:

Wird ein windschiefes Viereck von einer Ebene als Transversale geschnitten, so sind die Produkte der Wechselabschnitte gleich, schon von *Ceva* l. c.

Poncelet im Traité, *Carnot*sche Verallgemeinerung: Werden durch O in der Ebene eines $2n+1$-Ecks Transversalen nach den Ecken gezogen, so teilen sie die Gegenseiten so, daß die Produkte gleich sind.

Vecten, Querret, Sturm etc., *Gergonne* 14 p. 63.

A. Jacobi, De trianguli rectilinei proprietatibus quibusdam non satis cognitis, Naumburg (1825); *Ferriot, Gerg.* 17 p. 141; Note von *J. D. G.* (1826) gleich *Gergonne*.

C. Harkema, Nouv. annal. (2) 11 (1872) p. 477. Erweiterung des *Ceva*; 3 beliebige Ecktransversalen bilden Dreieck $\triangle'$, dann $\triangle' : \triangle$ etc; *dasselbe E. Cesàro*, Mathesis (1884) vgl. Nouv. correspond. (1880) p. 575, und

Th. Clausen, Crelle 3 p. 197, p. 201 und *Steiner, Gerg.* 19.

V. Jamet, Nouv. corresp. (1879) p. 131; *Menelaos* und *Ceva* auf Kugel; *E. Catalan*, ibid. p. 384; 3 Ecktransversalen schneiden sich in *einem* Punkte, wenn sie die Gegenseiten nach denselben Funktionen der anliegenden Winkel teilen; dazu *Brocard*, ibid. (1880): Wenn 3 Ecktransversalen konpunktisch, so auch die Isogonalen, aber schon weit früher *C. Adams*.

J. Kudelka, Über eine planimetrische Grundlage der modernen Geometrie, Programm Linz (1877).

A. Thaer, Schlöm. 29 (1884) p. 183; *Menelaos* und *Ceva* mit *Möbius*schem Zweieckschnittverhältnis.

Ernst Uhlich, Altes und Neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks Grimma (1886). (*Fermat*sche Punkt).

L. Ravier, Nouv. annal. (3) 11 (1892) p. 349: Wenn man von jeder Ecke eines Polygons alle möglichen Tangenten an eine algebraische Kurve zieht, so teilen sie die nicht durch die Ecken gehenden Seiten so, daß das Produkt der Abschnitte gleich $+1$ ist (Généralis. du théorème de *Ceva*). Dazu Zusätze: *Fr. Ferrari*, Nouv. annal. (3) 14 (1895) p. 41; ibid. p. 30: *A. Cazamian*, Sur le théorème de *Carnot*.

Pascal und Brianchon.

Der *Pascal*, der sich 1640 im Essai sur les coniques findet und der aus *Desargues'* Satz über die Involution der Transversale eines vollständigen Vierecks unmittelbar folgt, sowie sein dualer (polarer) Satz, der *Brianchon*, gehören nur zum kleinen Teil der Elementargeometrie an, doch ist ein Teil der Beweise durchaus elementar, und die Sätze gelten ja auch für den Kreis.

Der *Brianchon* findet sich zuerst in dem für die Konstruktion mit dem Lineal so wichtigen „Mémoire sur les surfaces courbes du second degré"; Journal de l'école polytechnique (1806) cah. 13; idem de l'héxagone mystique de *Pascal*, Correspond. *Hachette* 2 p. 383; 3 (1814) p. 1.

Hexagramma mysticum als Name des *Pascal*schen Sechsecks bei

Leibniz im Brief vom 30. Aug. 1676, aber vermutlich in den Papieren *Pascal's*. *Carnot*, Géométrie de pos. Satz 45. *Servois* l. c. p. 27, ganz ähnlich später *Alf. Leman* (1898). *Servois*, *Gerg.* 1 p. 335 und besonders Note von *Gerg.* ibidem 4 (1823) p. 18; sehr elementar, wenn auch nicht ganz allgemein. Spezialfall: 2 benachbarte Seiten eines Kreissechsecks sind parallel ihren Gegenseiten, so ist es auch das dritte Paar und damit der *Pascal* durch Zentralprojektion für den Kreis und ebenso für Kegelschnitte (vgl. dazu *Möbius*, *Crelle* 36 p. 216 und *A. Milinowski*, die Kegelschnitte (1879) und Elem.-synth. Geom. der Kegelschn. Teubner 1882, daselbst auch *Brianchon*). *Abonné*, ibid. 13 p. 379, dazu *Gergonne* p. 381 analytisch; *Gergonne* auch für die Kugel.

J. B. Durrande, *Gerg.* 14 (1823) p. 26—62; *Pascal* ganz elementar: Die 3 Schnittpunkte sind die 3 Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise; *Brianchon* als dualer (polarer). Spezialisiert für Fünfecke, Vierecke, Dreiecke. Beachtenswert ist die Dissertation préliminaire. *G. P. Dandelin*, ibid. 15 p. 387, (geradliniges Hyperboloid). *Ch. Sturm*, *Gerg.* 16 p. 265 analytisch (dort schon $C + mC'$ für Kurven durch Schnitt von C und C'). *Dandelin*, ibid. p. 322, ganz elementar, durch stereographische Projektion. Ibid. 18 p. 214 und Académie de Bruxelles (1827), *Ferriot* siehe oben, *Steiner*, *Gerg.* 18 p. 339 (*Steiner*sche Punkt), die Sätze 3 und 4 von *Plücker* (und verbessert); *Ch. Sturm*, ibid. 17 (1826) p. 173, Mémoire sur les lignes du seconde ordre. *J. Plücker*, *Crelle* 5 (1829) p. 268. Die 60 *Pascal*schen Geraden zu je 3 durch *einen* Punkt (*Steiner*), von den 20 Punkten je 4 in 15 Geraden (*Plücker*), so daß durch jeden Punkt 3 solcher Geraden; *Steiner*, Systematische Entwicklung (1832) p. 311. Die Sätze mit der *Plücker*schen Korrektur.

Crelle 6 (30) p. 310, Anonymus: Beweis eines Satzes aus *Crelle* 3 p. 312 von *Hellerung*, eine Verallgemeinerung des Beweises des *Pascals* von *Plücker*, analytisch-geometrische Entwicklung (1827) p. 183. ($4m + 2$-Eck, wenn $2m$ Durchschnitte in *einer* Geraden liegen, dann auch der letzte.) *Plücker*, *Crelle* 9 (1832) p. 411. Zwei Sätze (duale) als Aufgabe, er selbst gibt *Crelle* 11 p. 26 den Beweis. *Ot. Hesse*, *Crelle* 24 p. 40; Über das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd. *A. Jacobi*, ibid. 31 (1846) p. 73, sehr einfacher Beweis der *Plücker*schen Sätze von Bd. 9, nachdem er p. 40 den *P.* und die *Steiner-Plücker*schen Sätze bewiesen, ibid. 34 (1846) p. 337, Note sur le théorème de *Pascal* von *Plücker* (Literatur); *Cayley*, ibid. 31 p. 213, Théorèmes de la géométrie de position, *Pascal* p. 219, analytischer Beweis desselben, der seitdem sich in den Lehrbüchern, z. B. *Salmon* 38, p. 98 sehr häufig findet.

Idem, *Crelle* 41 p. 66; Ausdehnung *Kirkman*scher Sätze (s. u.). *Cayley* p. 84 weist die Priorität für einen der Sätze *Salmon* zu; *O. Hesse*, *Crelle* 41 p. 269; Beziehung der *Plücker*schen Geraden (3 in P und 3 dadurch bestimmte im konjugierten Punkt von P).

Roguet, Nouv. annal. 3 (44) p. 304 analytisch; *Brianchon* synthetisch durch Pol und Polare. *A. Hallecourt*, ibid. 7 p. 83, elementar durch *Carnot*-(*Desargues*)-schen Satz, bezw. *Menelaos*. *Lebesgue*, ibid. 8 (1849) p. 39 analytisch Hexagramma mysticum. *Terquem*, ibid. 11 (1852) p. 163, *Geschichte*. (Einige Druckfehler z. B. *Darraude* statt *Durrande*: 1833 statt 32; *Hesse* p. 36 statt 40.)

T. P. Kirkman, Erste Publikation: Manchester courrier, 27. Juni 1849; 45 Sätze über das *Pascal*sche Sechseck; ausführlich Cambridge and Dublin (1850) p. 185. On the complet hexagramma etc. Die 60 *Pascal*schen Geraden gehen zu drei durch 60 Punkte H, so daß auf jeder ein *Steiner*scher Punkt und 3 Punkte H etc.

Plank, Grun. 18 (1852) p. 335; der *Pascal* und seine Anwendung etc. Einfacher Beweis für den Kreis und seine Anwendungen. (*Castillon*: Eine Sehne von einem gegebenen Punkt des Kreises zu projizieren etc.)

F. Brioschi, abgedruckt Nouv. ann. 16 (1857) p. 269.

O. Hesse, Crelle 68 p. 139; Korrespondenz zwischen den 60 *Pascal*schen Geraden, den 60 *Kirkman*schen Punkten, den *Cayley-Salmon*schen Geraden und den 20 *Steiner*schen Punkten etc.

Umkehrung des *Pascal,* synthetisch von *J. E. Barbier* bewiesen *Lavallée, Tuffraud,* Nouv. annal. (2) 7 p. 185 und *Barbier,* einfach (analytisch) p. 186.

E. Thieme, Grun. 60 (1876) p. 173; Untersuchungen über das *sphärische Pascal*sche Sechseck etc.

Der Beweis des *Pascal* für den Kreis von *J. Steiner* ist von *F. Geiser,* Theorie der Kegelschnitte (1875) p. 18 mitgeteilt und von *K. Haase* in den Blättern für bayrisches Gymnasial- und Realschulwesen auf alle C^2 erweitert.

Miß Ch. Ladd, The *Pascal* Hexagramma Americ. J. 2 (1879) p. 1, im Anschluß an *G. Veronese,* Nuovi teoremi etc. R. Acad. dei Lincei (3) 1 (1877) p. 141 (Projectiv.)

P. Treutlein, Hoffmann 10 (1880) p. 89. *Brianchon* und das Prinzip der Dualität, elementar; Beweis des *Pascal,* dritter Beweis des *Brianchon* mit Hilfe des dualen Satzes zum *Carnot*schen Kreistransversalensatzes (von *Chasles*), dazu p. 192 ein sehr elementarer Beweis des Satzes: Bei gegebener Lage der Geraden a und des Punktes P auf ihr hat das Produkt des Sinus der Winkel, welche a mit den Tangenten von P an den Kreis bildet, den Wert $(d^2 - r^2) : p^2$, wo d Abstand der Geraden und p der von P vom Zentrum, von *O. Wiener* (als Schüler). Der Beweis des *Brianchon* ist von *K. Haase* l. c. für alle C^2 erweitert; *Pascal* und *Brianchon* von demselben am selben Ort (1882 oder 83) „Zur elementaren Behandlung der Kegelschnitte“ bewiesen.

B. Sporer, Grun. (2) 1 (1884) p. 333. Verallgemeinerung des *Brianchon* und *Pascal* (Problem von *Castillon*), vgl. *Poncelet.*

Karl Haase (Augsburg): Tidsskrift f. Math. (5) 3 (1885); völlig elementarer Beweis des *Pascal* und *Brianchon.*

G. Bianchi, Torino Atti 21 (1886) p. 686; Historische Note. *Bessel* fand den *Pascal* (1820) selbständig wieder. (Brief an *Olbers.*)

J. Casey, A sequel to *Euclid* (1888) p. 129, einfacher Beweis durch die Gleichheit von Peripheriewinkeln. auch der ganz der Elementarmathematik angehörige Fall, wo der Kegelschnitt in zwei Gerade ausartet; vgl. *Hilbert* „Grundlagen“ (1899). Einen sehr einfachen Beweis des Herrn *Feder* (Frankfurt a. M.) für den Spezialfall teile ich hier mit:

$AB \parallel DE$; $BC \parallel EF$. Behauptung: $CD \parallel FA$; Beweis: $\triangle BCE = \triangle BCF$, also auch $BAE =$ Viereck $BACF$, ferner $\triangle BAE = BAD$, also $\triangle BAD = BACF$, also $\triangle FAD = FAC$, mithin $CD \parallel FA$. Vgl. auch, für diesen Fall, *Dobriner,* Hochstift (12) 2 (1896) und *Pietzker* (1897) p. 87.

Man vergleiche auch *Franz Seydewitz, Grun.* 10 p. 59. Sind die Gegen-

seiten eines windschiefen Sechsecks im Raume paarweise ∥, so gehen die 3 Hauptdiagonalen durch *einen* Punkt, der ihre gemeinsame Mitte.

L. Gérard, Bulletin de .mathémat. élémentaire, 2 p. 264; *Pascal* für den Kreis elementar.

A. Leman, Beiträge etc., Programm Mülhausen (1898) No. 552; durch rechnende Geometrie, elementar (vgl. *Servois*).

Über die Rolle, welche der *Pascal* (Spezialfall) für die Grundlagen der Geometrie spielt, vgl. *Hilbert* l. c. und *F. Schur*, Annal. 51 (1899) p. 401 (Beweis auf p. 405). Referent erwähnt auch *T. Cotterill*, London mathem, society proceedings 8 (1877) p. 311; A new view of the *Pascal* hexagramma.

G. Allgemeine räumliche Beziehungen.

27. Stereometrie. Die elementare Stereometrie hat sich zur deskriptiven Geometrie und zur projektiven Raumgeometrie erweitert. Elemente dieser Disziplin sind auch in den Unterricht der höheren Schulen eingedrungen. Nach Analogie der Planimetrie ist die Sphärik selbständig entwickelt worden. Die Betrachtung der Polyeder höherer Arten und die Untersuchung über die Gültigkeit des *Euler*schen Satzes führte zur Topologie im Raum. Auch von dieser Disziplin sind Spuren zu merken. Seit *Wiener*'s Schrift „Vielecke und Vielflache" werden auch die *Kepler-Poinsot*schen Polyeder ab und an den Schülern vorgeführt. Die wesentlichste Änderung gegen *Euklid* hat die Volumberechnung erfahren, welche meistens auch für schiefe Prismen auf Integration oder w. d. i. auf das *Cavaleri*sche Prinzip gegründet wird. Übrigens ist die Pyramidenberechnung des *Eudoxus* bei *Euklid* und die Kugelberechnung etc. bei *Archimedes* im Grunde auch nichts anderes. Von der „Fusion" der Planimetrie und Stereometrie haben wir schon bei Methodik gesprochen. Die spezielle Methodik der Stereometrie änderte sich dahin, daß auf die gegenseitige Beziehung der Grundgebilde Punkt, Gerade, Ebene ein stets steigender Wert gelegt wird, doch behauptet sich die Körperberechnung wegen ihres praktischen Nutzens.

Definition der Ebene: s. Grundbegriffe (*Enriques*); *Euler*sche Satz s. diesen; Sphärik s. diese; Tetraeder s. d.; Volumberechnung bei Volumen, Polyeder s. d.; reguläres Polyeder s. d.

Die unendlich ferne Gerade der Ebene als Konsequenz von *Desargues*' unendlich fernem Punkte der Geraden ist von *Poncelet*, Traité de géom. project (1822) Artikel p. 107 eingeführt. Der von *Crelle* (auch *Baltzer*) gegebene Beweis des Satzes *Euklid*'s 11, 4 ist von *Crelle* allerdings schon 1834 gegeben, wenn auch erst *Crelle* 45 publiziert, enthält übrigens keine irgendwie wesentliche Vereinfachung gegen *Euklid* und findet sich schon in *Blanchet*'s Bearbeitung von *Legendre*

als Änderung des gekünstelten Beweises von *Legendre*, bei *Grunert* ohne Quellenangabe, *Grun.* 26 (1856) p. 108 und schon bei *J. Knar*, Anfangsgründe der reinen Geometrie (1829) § 591.

Der Satz: 2 Gerade, welche einer dritten parallel sind (nach derselben Seite), sind untereinander parallel, ist von *Lobatschefskij* und *J. Bolyai* unabhängig vom Parallelenaxiom gegeben worden.

L'Huilier, *Tédenat*, *Rochat* etc., *Gerg.* 3: Eine Ebene zu bestimmen, so daß die Projektion eines Dreiecks gegebene Form hat.

Bérard, *Gergonne* 6 (1816). Relation zwischen den 6 Winkeln von 4 Geraden (*Carnot*).

Gergonne, ibid. 9 p 51; Parallelogramm und Parallelepipedon wie *Bérard*, aber Diagonale eines Parallelepip. ibid. 11: Satz über die Ähnlichkeitspunkte von 4 Kugeln (Aufgabe von *Gergonne*), Beweis von *Vecten* und *Durrande* p. 364. *A. Morel*, ibid. 13 p. 267; Inhalt einer Fläche gleich dem der Projektion, dividiert durch den Kosinus des Neigungswinkels (*Euler*); *Sturm*, ibid. 15 p. 309; propriétés diverses des polygones fermés, plans ou gauches. *P. Tédénat*, ibid. 15 p. 128; Zerlegung eines regulären Polyeders durch eine fortgesetzte Reihe von Schnitten senkrecht zur Kante. *Bobillier*, ibid. 17 p. 335; Ort der Zentren der Perspektive zweier perspektivischer Dreiecke, wenn die eine Ebene sich um die Achse der Homologie dreht. Idem: ibid. 18 p. 249; Recherches des conditions de possibilité d'un tetraëdre ayant ses arrêtes resp. parallèles à six droits donnés. *Abonné*, (*Gergonne*?): ibid. 20 p. 84. Eine Kugel welche auf 4 gegebenen Ebenen Kreise vom gegebenen Radius ausscheidet, zu konstruieren. *Pagliani*, ibid. p. 86; statt der Ebenen Kegel mit gegebener Spitze und Öffnungswinkel.

J. Garnier, *Quetelet* 1 (1825) p. 115. Die für Atomenlehre wichtige Aufgabe (aus *Euler*'s Algebra): Ein reguläres Tetraeder ist mit sehr kleinen Kügelchen gefüllt, das Verhältnis des vollen zum leeren Raum zu bestimmen.

A. Quetelet, Académie de Bruxelles (1827) p. 49 und 70. Sur différents sujets de géométrie à trois dimensions. Problema di *Bruno*, Soluzione geometrica di un difficile problema di sito, Neapel (1825). Gegeben ein Punkt und 2 Gerade, durch den Punkt eine Ebene zu legen, welche die Geraden in 2 Punkten so schneidet, daß das Dreieck einem gegebenen ähnlich ist. Dazu *Hachette*, ibid. p. 89—128; Problème de *Bruno* ist Spezialfall der Aufgabe: Von einer Pyramide ist die Basis gegeben und die Kantenwinkel an der Spitze; die Spitze zu konstruieren; vgl. auch Bericht von *J. Neuberg*, Mathesis 16 p. 19.

Mich. Chasles, *Quetelet* 8 (1835) p. 56, hübsche Elementarsätze.

A. F. Svanberg, ibid. 9 (1837) p. 72; Analyse des polygones et des pyramides (trigonometrisch und analytisch). Die Pyramiden sind gleichflächig und jeder zweite Winkel gleich.

H. Burhenne, Die Raumgestalten nach ihrer *Symmetrie* dargestellt; Cassel (1832).

Crelle, Theorie der Ebene (1834), publiziert *Crelle* 45 (1853); noch heute lesenswert.

J. Steiner, *Crelle* 3 p. 390. Wenn die 3 Diagonalen eines Oktaeders sich im selben Punkt O rechtwinklig schneiden, so liegen die Fußpunkte der Lote von O auf den 8 Seitenflächen auf einer Kugel (Beweis durch Projektion);

dazu *Fresen,* Nouv.correspond. 3 (1876) p. 81 und *E. Lucas,* ibid. 5 (1879) p. 209 Question de géométrie.

K. Koppe, Crelle 14 p. 70. Die ersten Lehrsätze der Stereometrie, sehr nachdrücklich (und richtig) gegen *Euklid* (und ebenso gegen *Legendre*), vgl. *Koppe's* Stereometrie, Essen (1836). (Der Aufsatz ist von *Terquem* in die Nouv. annal. übersetzt.)

Frz. Heinen, Crelle 18 (1838) p. 181; In jedem Parallelepipedon ist die Summe der Quadrate der 4 Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der 12 Kanten.

Mayer, Über Berechnung der Kohlenmeiler, Gotha (1830).

M. G. v. Paucker, Die *Gauß*sche Gleichung der Bogendreiecke und zwei merkwürdige Sätze vom Raum (1844).

M. W. Drobisch, Zusätze zum florentiner Problem (*Viviani*sche Fenster), Abhandlung der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1852).

O. Wolfram, Programm Hof (1848); Kubaturen durch elementare Summationen.

J. B. Sturm, Grun. 24 (1855) p. 118; Seitensumme und Winkelsumme der körperlichen Ecken.

W. Zehme, Die Geometrie der Körper (Beweis des *Cavaleri*schen Prinzips und der *Guldin*schen Regel), Iserlohn (1860).

F. Woepke, Liouville (2) 6 (1861) p. 231; Umdrehungskegel.

K. K. Unverzagt, Über eine neue Methode zur Untersuchung räumlicher Gebilde. Festschrift Wiesbaden (1864), (gehört eigentlich in die Projektionslehre).

C. A. Bretschneider, Grun. 46 (1866) p. 501; kürzeste Abstände und Winkel zweier kreuzender Geraden.

K. Rudel, Anwendung eines einfachen Satzes aus der Stereometrie (1877). (Wenn von n Geraden je 2 in einer Ebene und nicht alle in derselben Ebene liegen, so sind sie zusammenlaufend (ev. parallel); steht aber schon in der berühmten Abhandlung *Gergonne's* 16 Satz 6 p. 213 (und Philos. mathémat.)

T. Hoza, Casopis 6 (1877) p. 245.

G. Hepsal und *Vex,* Education times 32 p. 23 No. 3750; Solution of a question. Eine große Anzahl gleicher Kugeln wird zur möglichst engen Berührung gebracht; das Verhältnis der Summe ihres Volumens zu dem Gesamtvolumen ist $\frac{1}{6}\pi\sqrt{2}$.

M. G. Paraira, Nieuw. Arch. 9 (1882) p. 96; Ein stereom. Analogon von het theor. von *Pappus.*

A. Cayley, Messenger 13 (1883) p. 107; On *Archimedes* theorem for the surface of a cylinder.

A. Thaer, Schlömilch 37 (1883) p. 249; Zur geometrischen Bedeutung des Eckensinus (*Staudt, Crelle* 23 s. Tetraeder).

J. Dupuis, Zeitschrift für das Realschulwesen 8 (1883) p. 154; Pyramidenstumpf durch Schnitte in die 3 Pyramiden zerlegt, deren Summe die Formel für das Volumen gibt.

Abbée E. Gelin, Volume du Tore, Mathesis 11 (1891) p. 66.

Fr. Roth, Beiträge zur Stereometrie, Programm Buxtehude (1890) siehe Polyeder.

J. Delboeuf, Mathesis 13 p. 47, p. 135; Sur le plan. Über den fundamentalen Satz: zwei Ebenen können nicht einen einzelnen Punkt gemeinsam haben.

H. Seipp, Grunert (2) 12 (1894) p. 16; Elementare Sätze über konvexe Ecken.

A. Emmerich, Hoffmann 27 (1896) p. 401; Stereometrische Gruppenaufgaben. Elementare Aufgaben über die Teilung eines Kreiskegels.

W. Heymann, Schlöm. 41 (1896) p. 326; Stereometrische Paradoxien (z. T. nicht elementar).

Dubouis, Bourget (1897) p. 161; Fundamentalsatz vom Lot; einfacher Beweis.

J. Wasteels, Mathesis 18 p. 85: Windschiefes Viereck, Abstand; *C. E. Wastels* ibid. 19 p. 9: Sur les figures cylindriques. (*Viviani*); ibid. 19 p. 65, *Stuyvaert* leitet die Formel aus 18 mittelst des Parallelepipedons ab.

Hieran schließen sich einige elementare Sätze über Geometrie der Lage (*Carnot*'s berühmtes Werk hat mit der géométrie de la position nichts zu tun).

J. Steiner, Crelle 1 (1826) p. 349; Einige Gesetze über die Teilung der Ebene durch Gerade und des Raumes durch Ebenen und Kugeln.

A. R. Luchterhandt, Grun. 2 (1842) p. 63 (s. auch Sphärik); Über eine Beziehung zwischen 4 Punkten einer Ebene.

A. Cayley, Crelle 31 (1846) p. 213; Sur quelques théorèmes de la géométrie de la position.

Franz Seydewitz, Grun. 10 p. 59 (gradlinige Hyperboloid als Seitenstück zur Ebene.)

C. A. Bretschneider, Schlöm. 6 (1861) p. 311; Anzahl der Geraden, Ebenen und Punkte, welche durch gegebene Punkte, Gerade und Ebenen in der Ebene und im Raume bestimmt werden.

F. Brioschi, Crelle 50 (1855) p. 238.; Relation zwischen 5 Punkten im Raum. (*Carnot,*)

Fd. Joachimsthal, Crelle 40; *Luchterhandt*scher Satz (s. Sphärik) (Determinanten.)

C. Bender, Grun. 56 (1874) p. 302; Auf eine Kugel lassen sich nicht mehr als 12 gleiche Kugeln auflegen (Kreis: 6 Kreise); dafür strenger Beweis von *R. Hoppe,* ibid. p. 307. Idem: *Grun.* (2) 1 (1884) p. 148. Ein Problem über berührende Kugeln. (*Hoppe* beantwortet die Frage: Wie groß muß eine Kugel mindestens sein, damit n gleiche sich gegenseitig berührende Kugeln auf ihr Platz haben?); dazu *Fauquembergue,* Mathesis; ganz elementar und kurz, aber weit früher dasselbe Problem behandelt und erledigt:

Charl. Tandel, Correspond. *Garnier* et *Quetelet* 1 (1825) p. 310, er kommt auf das Problem infolge des von *Berzelius* in seiner *Chemie* ausgesprochenen Satzes; beweist erst den Satz für den Kreis und dann für die Kugeln völlig elementar.

J. Garnier in einem Zusatz „Observations" behandelt das Problem etwas geringschätzig.

Christ. Wiener, Clebsch Annal. 6 (1862) p. 28: Wie man sich aus einem Labyrinth herausfindet. Idem ibid. p. 30; *C. Hierholzer,* Über die Möglichkeit, einen Linienzug zu umfahren etc., gehört schon teilweise in die Topologie und die dort erwähnte Arbeit *Listing*'s: Vorschule zur Topologie, Göttinger Studien 1847 ganz und gar.

G. Moshammer, *Schlöm.* 21 (1876) p. 449; Zur Geometrie der Geraden. Durch jeden Punkt im Raume generaliter 4 Strahlen, welche mit je 2 gegebenen Geraden G und G' gleiche Winkel bilden und von G und G' gleichen Abstand haben.

H. Hertzer, *Schlöm.* 11 (1866) p. 244; Über Vielecke, Vielseite und Vielflache.

Lehrbücher und Aufgabensammlungen (s. auch Lehrbücher).

Meyer-Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben. Teil 2 (1809).

N. J. Larkin, Introduction for solid geometry (1820) (Krystallographie).

E. S. Unger, Übungen aus der reinen und angewandten Stereometrie: Berlin (1830).

B. Holmboe, (*Abel*'s Lehrer): Stereometrie; Christiania (1833).

v. Swinden-Jacobi, Eine Reihe stereometrischer Aufgaben (1834) p. 436—480.

K. Koppe, Stereometrie, Essen (1836).

Ch. Hrch. Nagel, Lehrbuch der Stereometrie, Ulm (1838).

L. Dupin, Géométrie stéréométrique ou collection de figures en *carton* etc., Paris (1842).

M. G. v. Paucker (1842); *Fr. Proß* (1842) Stuttgart; vgl. Lehrbücher.

J. A. Adhémar, Traité de géométrie; géom. de l'espace, Paris (1844).

O. Möllinger, Stereometrische *Wandtafeln* nebst einem erklärenden Text (nach *Lacroix* und *Legendre*), Solothurn (1844).

D. F. Gregory, Geometry solid, 2. Aufl. (1851); idem u. *W. Walton*, Treatise on the application of analysis to solid geometry. London (1845).

J. T. H. Müller, Lehrbuch der Stereometrie, Halle (Waisenhaus) (1851).

G. Zizmann, Geometrische Formenlehre (Vorwort von *Stoy*), Jena (1852).

G. Mehler, Hauptsätze der Elementarmathematik (1859) (*Schellbach*), besonders die Stereometrie ist gut.

P. Frost and *J. Wolstenholme*, Treatise on solid geometry (1863).

C. Hechel, Stereometrische *Aufgaben*, Reval (1865).

E. Heis und *Ths. Eschweiler*, Köln (1867) hervorzuheben sind die zehn Anhänge: deskriptive Geometrie, Sternpolyeder, Stereometrische Projektion etc.

F. Reidt, Sammlung von Aufgaben aus Trigonometrie und Stereometrie. Leipzig (1872).

Guido Hauck, (*Kommerell* 2. Aufl. Tübingen) (1872); 8. Aufl. (1900), für die Gymnasien meines Erachtens zurzeit das zweckmäßigste Buch (Projektionslehre als Vorbereitung auf deskriptive Geometrie).

C. L. Landré, Ster. Hoofdstukken ter uitbreid. van d. elem. Leerb. Amsterdam (1875).

J. K. Becker, Stereometrie Berlin (1879); *Victor Schlegel*, Wolfenbüttel (1880); *F. Glinzer*, Stereometrie Hamburg (1881).

H. Westermann, Schulstereometrie, Riga (1883), auch Elemente der darstellenden Geometrie, ein Buch, das auch für Lehrer sehr viel Anregungen bietet.

J. Henrici und *P. Treutlein*, Stereometrie Leipzig (1883) 2. Aufl. (1901), projektive auch deskriptive Geometrie, s. Lehrbücher.

A. Sourek, Stereometrie (bulgarisch) von *Studnicka* gelobt (Filipopel) (1883), desgl. *J. Janoušek*, (böhmisch), Geometrie für Lehrerbildungsanst., Brünn (1883).

R. Heger, Stereometrie Breslau (1883) geht über das gewöhnliche Schulpensum hinaus; geradlinige Flächen 2. Grades, projektive Geometrie.

R. de Paolis, Elementi di geometria, Torino (1884) (Trennung von Planimetrie und Stereometrie beseitigt).

L. Jelinek, Stereometrische *Aufgaben,* Prag (1884).

J. Petersen, Lehrbuch der Stereometrie (1885). *G. B. Halsted,* The elements of geometry. Newyork (1885) (Sphärik).

K. Jüdt, Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie, 3. Aufl., Ansbach (1885); *Carl Gusserow,* Leitfaden für den Unterricht in der Stereom. Berlin (1885) (Körperberechnung geschickt).

H. Thieme, Sammlung von Lehrsätzen und *Aufgaben* aus der Stereometrie (keine Körperberechnung). Leipzig (1886).

G. Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen (Krystallographie), Leipzig (1886).

K. Heinze, Genetische Stereometrie, herausgegeben von *Lucke,* Leipzig (1886), s. Kritik von *Holzmüller, Hoffmann* 17 und *G. Hauck, Hoffmann* 18; beide urteilen sehr abfällig.

R. G. J. Nixon, Euclid revised; stereometry, Oxford (1887).

Otto Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. Leipz. (1887).

Fr. Lucke, Leitfaden der Stereometrie (1890) (empfohlen von *Hauck*).

R. B. Hayward, The elements of solid geometry, London (1890).

P. Scholim, Stereometrische Örter und Konstruktionsaufgaben; 1 und 2 (1890 und 1891).

H. Martus, Stereometrie (1894).

K. Schwering, Stereometrie (1894), 2. Aufl. (1900).

H. M. Taylor, Euklid Buch 11 und 12 (Darstellende Geometrie) (1896).

J. Lengauer, Die Grundlage der Steometrie; Kempten (1896), reich an Aufgaben.

H. D. Thompson, Elements of solid geometry and mensuration, London (1896).

G. Holzmüller, Die Elemente der Stereometrie, 4 Bände, Leipzig (1899), (1900) etc., fast überreiches Material.

M. Schuster, Stereometrische Aufgaben, von *Lange* warm empfohlen, Leipzig (1900).

Siehe auch die „Lehrbücher", speziell für Italien.

Ich bemerke, daß für den Lehrer ganz besonders einfache Konstruktionsaufgaben von Nutzen sind, an Körperberechnungen, die eigentlich mehr in die Algebra als in die Geometrie gehören, herrscht kein Mangel.

28. Volumen und Oberfläche. Die Frage nach der allgemeinen Definition und Vergleichung der Oberflächen geht über das Elementare hinaus, doch muß hingewiesen werden auf den Beweis von *H. A. Schwarz* (Gesammelte Werke T. 2 (1890) p. 308 (1883) cf. Math. 90 p. 222), daß die Oberfläche nicht definiert werden darf als Grenze der Oberfläche eines eingeschriebenen Polyeders, dessen Seitenflächen unendlich klein werden und dessen Begrenzung mit der der Oberfläche schließlich zusammenfällt.

Die Frage nach dem Volumen der Polyeder und Pyramiden ist von der bei „Inhalt“ behandelten nicht wesentlich verschieden, vgl. *De Zolt*, Principii d'eguaglianza dei poliedri, Milano (1883). Wenn es aber dort, sobald die Stetigkeit als durch die Anschauung gegeben angesehen wurde, gelang, Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe auch als flächengleich im *De Zolt-Hilbert*schen Sinne zu erweisen, ist die Frage für den Raum durch die Arbeiten von ***M. Dehn*** (Münster) im negativen Sinne entschieden worden, vgl. unten *Bricard*. *Dehn* zeigte in seiner Abhandlung über den Rauminhalt: Annalen (1902) Bd. 55, daß der Nachweis der Gleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe stets einen infiniten Prozeß erfordert, und in der Arbeit: Über raumgleiche Polyeder, Göttinger Nachrichten (1900) 27. Okt. p. 345 bewies er den „überraschenden“ Satz, daß Tetraeder und Prisma niemals raumgleich sein können und ebensowenig ein reguläres Tetraeder und ein rechtwinkliges. Gleichzeitig mit *Dehn* ist *K. T. Vahlen* zu nennen mit der elementaren und kurzen Arbeit: Über endlichgleiche Polyeder, Annalen 56 (1903) p. 507.

Die Volumenfrage ist (abgesehen von den Arbeiten *Dehn*'s) behandelt in dem schon bei „Inhalt“ zitierten 5. Artikel des Werkes von *Enriques* durch *Amaldi*, und sehr vollständig in dem mir nachträglich bekannt gewordenen Programm von *H. Vogt*, (1904) Nr. 211 Breslau, wo sich sehr viele Literaturangaben finden. *Vogt* faßt Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit zusammen als „Endlich-Gleichheit“ im Unterschied von der Integration. Wichtig ist die Arbeit von *H. Minkowski*, Annalen 57 (1903) p. 447, wo der Begriff Oberfläche aus dem einfacheren Begriff Volumen abgeleitet ist. Die Arbeit ist nicht eigentlich elementar, ebensowenig die von *S. O. Schatunowsky*, ibid. p. 496, Über den Rauminhalt der Polyeder.

Lebhaft umworben ist auch der Beweis der Raumgleichheit symmetrischer Tetraeder und Polyeder, den *Legendre* in der 1. Aufl. seiner Elemente (1794) nicht für elementar möglich hielt und dann in der Note 7 der 2. Aufl. hinzufügte. Der Beweis gelingt elementar nur unter Annahme irgend eines der Axiome, z. B. daß Kongruentes von Kongruentem Kongruentes gibt, oder Gleiches von Gleichem Gleiches gibt, so bei

A. M. Ampère, Correspond. *Hachette* (1806) 6. Juli p. 184 prés. á l'Académie de Lyon (1801); wohl der einleuchtendste und einfachste Beweis. *Ampère* erwähnt dabei einen Beweis von *Fournier*, der sich in der 3. Aufl. von *Lacroix*' Géométrie findet.

Symmetrische Polyeder.

J. B. Durrande, Gergonne 6 p. 304. Symmetrische Polyeder haben gleiches Volumen, bewiesen durch Zerlegung des Tetraeders vom Zentrum der einbeschriebenen Kugel aus in kongruente vierseitige Pyramiden.

M . . . , dito *Crelle* 4 p. 296; *Gudermann*, dito (1830) *Crelle* 6 p. 303 vom Zentrum der Umkugel ($P = \frac{1}{3} gh$, aber Gleiches von Gleichem gibt Gleiches), schon kritische Biblioth. (1828) Nr. 17; Volumen der Pyramide ohne Integration p. 208; p. 414 gibt *Crelle* die gebräuchliche Ableitung, welche *Gergonne*, s. Annales 19 p. 151, von *Euklid* 11 p. 28 ausgehend, durch $\frac{1}{3} = \sum \frac{1}{4^k}$ ersetzt hatte; dort wird die höchst einfache Ableitung von $V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot PQ$ sin (AB, CD) [*Servois*] von *Tramontini* mitgeteilt (s. *Günther* — *F. Klein* bei Tetraeder).

Ch. Heßel, dito *Grunert* 7 (1846) p. 284 (der angibt, daß *Gerling* auf Aufforderung von *Gauß* einen Beweis gegeben habe, s. Zusatz am Schluß des Artikels); *Ign. Hoffmann, Grun.* 10 p. 377 (viel Literatur, der eigentliche Beweis: *Ampère*); *P. G. Heinemann, Grun.* 23 (1854) p. 361 (von *Hessel* empfohlen) Spiegelung (*Ampère*) und Subtraktion.

Gleichheit von Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe.

Rud. Wolf, Grun. 7 p. 440. Sein Prinzip: „Aus Gleichheit des Erzeugenden folgt Gleichheit des Erzeugten“ ist nur eine andere Fassung des *Cavalieri*schen, der auch durch die Bewegung des Querschnitts den Körper entstehen läßt. *Hessel, Grun.* 14 p. 162 integriert auch; derselbe, *Grun.* 47 (1867) p. 433. *J. B. Sturm* will die Gleichheit von Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe nach der Weise *Gerwien*'s für Flächen beweisen, kommt aber auf einen infiniten Prozeß: *Grun.* 24 p. 116. *Lieber* und *Lühmann*, Leitfaden etc. (1892) § 7. *E. Scheeffer, Hoffmann* 25 p. 419. Anzuführen ist auch *Terquem*, Nouv. annal. 5 (1846) p. 232; Note sur les aires et les volumes. *R. Bricard*, Nouv annal. (3) 15 (1896) p. 331. *Bricard* weist nach, daß äquivalente Polyeder generaliter nicht in kongruente Stücke zerlegt werden können. Es muß eine gewisse lineare Funktion ihrer Flächenwinkel (*dièdres*) mit ganzen Koeffizienten einem Vielfachen von π gleich sein. Für symmetrische Tetra- und Polyeder ist diese Bedingung erfüllt.

Crum Brown, Edinburgh M. S. proceedings 12 (1893) p. 106 (ausführlich Edinb. R. S. transactions); On the division of a parallelepipedon into tetrahedra. Hier wäre wohl hinzuweisen auf *Simon L'Huilier*, Conversion imméd. d'un polyèdre en une pyramide etc. Biblioth. univers. 18 (1827) p. 85.

Prismatoid und Obelisk.

Prismatoid (P) ist ein Körper, begrenzt in parallelen Ebenen von 2 Polygonen, deren Seiten einander parallel sind, und den Seitenflächen, welche durch Verbindung der entsprechenden Ecken entstehen.

Obelisk (O) ist ein Körper, begrenzt von 2 Polygonen mit gleich viel parallelen Seiten und den Trapezen, welche von Verbindungslinien der entsprechenden Kanten begrenzt werden (daher Trapezoidalkörper von

August genannt). Der Obelisk ist ein spezieller Fall der Prismatoide (Name von *Wittstein*), aber, wie *Bauer*, *Schlömilch* 13 zeigte, auch das Prismatoid ein spezieller Fall des Obelisken; der Streit um den Vorzug daher müßig. Die Formel für den Inhalt $6V = h(b + B + 4\beta)$, wo b und B die Flächen der Grund- und Deckfläche, β die des Mittelschnitts bedeutet, ist aber schon von *Newton* (oder *Gregory*) gegeben; so *Baltzer*, Elemente p. 9, oder noch früher von *Torricelli*, Exercitat. geometricae (1647) (*Aubry*).

Immerhin haben *K. Koppe*, *August* und *Wittstein* das Verdienst, die Formel in den Schulunterricht eingeführt zu haben. Schon *Grunert* hat bemerkt, daß die ganze Formel nichts anderes ist als die Anwendung der sogenannten *Simpson*schen Näherungsformel für Volumenberechnung, daher von *Newton* herrührt und noch allgemeiner gültig ist; denn sie gibt das Volumen genau wieder für Körper zwischen parallelen Ebenen, deren Querschnitt eine Funktion 3. Grades des Abstandes ist, während bei P- und O-förmigen Körpern der Querschnitt nur vom 2. Grade ist.

Spezielle Fälle sind zahlreich bei *Meyer Hirsch*, Geometrische Aufgaben 2 (1807), trigonometrisch und durch elementare Rechnung behandelt §§ 101—106, 155—157, 180—190. Die Formeln sind sehr weitläufig und undurchsichtig. Schon *Chapman*, schwedischer Admiral, französisch übersetzt: Traité de la construction des vaisseaux, Brest (1781). *Tinseau* (1780), *Prony, Eytelwein, Poncelet.*

H. F. W. Brix, Prismatoidformel; Anhang zur 2. Aufl. des elementaren Lehrbuchs der Statik fester Körper. Berlin (1831) (Körper- und Schwerpunktbestimmungen); derselbe: *Crelle* 25 p. 129.

Jac. Steiner, Crelle 23 p. 275; Prismatoid definiert und die Formel elementar (Mittelschnitt) abgeleitet, auch auf geradlinige Flächen zwischen parallelen ebenen Schnitten angewandt. Die Arbeit für die Schule wie geschaffen!

K. Koppe, Crelle 18 p. 275, Obelisk durch Integration; ders.: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie (elementar), Essen (1843), Anfangsgründe der reinen Mathematik T. 2, 2. Aufl. Essen (1846). Besonders die Einführung des sogenannten Ergänzungskörpers, der entsteht, wenn durch einen Punkt der Grundlinie Parallelen zu den Kanten bis an die Deckebenen gezogen werden.

Grunert, Grun. 9 (1847) p. 82, *Koppe*'s Obelisk etwas vereinfacht; p. 87, über die Entstehung des Obelisken. Ders. 10 (1847) p. 260 Literatur; Grund für die Gültigkeit der Formel des Prismatoids. Dieselbe Bemerkung, die *Simpson*sche Regel betreffend, bei *Chancery Wright,* The mathemat. monthly (*Runcle*) (1859); p. 21 die Prismatoidformel, welche p. 47 von *Peirce* erweitert wird.

W. Ligowski, Inhaltsberechnung der Körper nach einer einzigen Formel, Berlin (1847).

E. F. August, Programm des Köllnischen Gymnasiums, Berlin 1849, Prismatoid; ders.: *Crelle* 45 (1853) p. 239 *elementar*; Prismatoid = Trapezoidalkörper, Anwendung auf Kubatur von Stücken der Flächen 2. Grades; siehe auch sein Lehrbuch von 1854.

C. A. Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie, Jena (1877); ders.:

Grun. 36 (1861) p. 18, sehr einfache Ableitung des Prismatoids (wie *Steiner* vom Mittelschnitt ausgehend); ibid. 39 (1862) p. 181 *H. Kinkelin,* zweigliedrige Formel für Prismatoide.

J. C. Becker, Schlöm. 23 (1878) p. 412, dieselbe Formel, und *Sintram, Grun.* 63 (1879) p. 770 und *Halsted,* Mathesis 5 (1885), Mensurations (1870) p. 130 „Die erste und einzige zweigliedrige Formel“ fürs Prismatoid; *W. H. Echols,* Annals of mathematics 9 (1895) p. 1; Note on the mean-area of the prismatoid zeigte, daß es unzählige solcher Formeln gibt.

C. W. Baur, Schlöm. 20 (1875) p. 380; Rauminhalt des Prismatoids (statisch, nicht elementar).

G. J. Latars, Mathesis 5 (1885) p. 74; Ableitung durch elementare Integration.

E. W. Hyde, Analyst 3 (1876) p. 113; Limits of the prismatoid form.

A. Schmidt, Korrespondenzbl. für die Württemb. gelehrten Schulen (1867), Fläche 2. Grades.

J. P. Weinmeister, Hoffmann 18 (1887) p. 321, 496: Über die Körper, deren Querschnitt parallel zu einer Ebene quadratische Funktion ihres Abstandes.

L. Maleix, Nouvelles annales (2) 9 (1880) p. 529; Volumen, wenn Querschnitt ganze rationale Funktion des Abstandes (Determinanten). Es schließt sich hier die *Heinze*sche genetische Stereometrie an: Programm Dessau (1868); über halbreguläre Körper (ohne sphärische Trigonometrie).

Die prismatischen und pyramidalen *Drehungskörper* (1874), Vortrag von *Lucke, Hoffmann* 16 (1885) p. 1. *Heinze*'s Behandlung des geschlossenen stereometrischen Gebildes und *Heinze*'s genetische Stereometrie, herausgegeben von *Lucke* (1886); dazu die Kritiken von *Holzmüller*, *Hoffmann* 17 p. 599 und *Hauck,* ibid. 18 p. 81—93.

Hilger-Grethen, Begründung und Anwendung der *Simpson*schen Regel etc.; Programm Bochum (1854). *A. Steen,* Nouv. annal. (2) 10 (1872) p. 301, Démonstration de la formule de *Simpson.*

W. Zehme, Geometrie der Körper, Programm Iserlohn (1859).

H. Martus, Kegelschnittkantige Pyramiden und kurvenkantige Prismen, Berlin (1863) (Kubierung).

Faßberechnung.

Die Faßberechnung, im 17. Jahrhundert durch *Kepler*'s Stereometria doliorum (1615), eine der Quellen der Differentialrechnung, gefördert, wurde im 18. Jahrhundert von *Oberreit,* der parabolische Krümmung der Dauben annahm, *Kästner*, Archiv etc., *Bernoulli* (1785); *Tobias Mayer*, Unterricht zur praktischen Stereometrie (1808) und *Lambert* (1765) bearbeitet. Die *Lambert* (*Simpson*) sche Formel $\frac{h \cdot \pi}{\varrho}(2R^2 + r^2)$, wo h die Länge des Fasses, $2R$ die größte Weite (*Spundtiefe*) und $2r$ den Bodendurchmesser bezeichnet, ist von *Lambert* nicht eigentlich bewiesen, wohl aber von **Grunert**, der Archiv 20 p. 301 und 23 p. 207 (elementar) nachwies, daß sie etwas zu groß und zwar um $^2/_{15}$ des Zylinders, der die Differenz von $2R$ und $2r$ zum Durchmesser und h zur Höhe hat. *Grunert* zeigt auch, daß die Formel

von *K. Koppe* im Anhang zu seiner Schrift über den Obelisken praktisch nicht brauchbar ist.

Formel von *W. Ligowski*, Taschenbuch der Mathematik (1867).

W. Adam, Faßberechnung, Programm Brünn (1869).

K. Broda, dito, Prag, Karolinenthal (1878).

P. Mansion, Mathesis 12 (1892) p. 14; Untersuchung der praktischen Formel:

$$v = 0{,}8 H \triangle \delta, \text{ wo } \triangle \text{ und } \delta = 2R \text{ und } 2r \text{ oder } V = 8H\triangle\delta$$

in Hektolitern, wenn H, $\triangle$, δ in Metern (Südfrankreich) bei *Mansion* auch Literatur.

Kramerius, Repetitorium für Mathematik und Mechanik, Wien (1887).

A. v. Frank, *Hoffm.* 22 (1891) p. 333, gibt drei Formeln an. Faß als Summe zweier gleichen Kegelstumpfe (D Spundtiefe, d Bodendurchmesser, L Länge):

I. $12J = L\pi (D^2 + dD + d^2)$.

II. Aus der Praxis (*Lambert*) $36J = L\pi(4D^2 + 4Dd + d^2)$. Er selbst leitet unter Voraussetzung parabolischer Krümmung der Dauben ab:

III. $60J = L\pi(8D^2 + 4Dd + 3d^2)$, aber nicht elementar.

O. Schlömilch, *Hoffmann* 23 (1892) p. 107 leitet diese Formel, welche sich mit anderen schon bei *Tobias Mayer*, Unterricht zur praktischen Stereometrie (1808) findet, elementar ab. Dann ibid. p. 109 *Stoll*, I zu klein, II statt Durchmesser die Radien $L\pi\left(\frac{2R+r}{3}\right)^2$, wenn das Faß ein Zylinder, dessen Höhe L und dessen Grundradius gleich dem arithmetischen Mittel der Radien aller Parallelschnitte zum Boden bei parabolischer Krümmung. Formel III einfach durch elementare Integration (in Weise *Schellbach*'s) und noch einfacher durch *Cavalieri*sches Prinzip. Noch eine IV. Formel: Faß als Stück eines Rotationsellipsoïds:

$3J = L\pi(2R^2 + r^2)$ (schon bei *Ligowski*, *Grunert* etc.).

Literarische Notizen von Dr. *A.*? *Hoffm.* 23 (1892) p. 251.

Vom praktischen Standpunkt aus: *Winkler*, Ausführliche Tabellen für den Quartinhalt der Bottiche und Fässer etc. 6. Aufl. Berlin (1853).

Verschiedenes.

Volumen des schräg abgeschnittenen Prismastumpfes (Frage *Gerg.* 1 p. 384): *Servois*, *L'Huilier* etc., *Gerg.* 2 p. 94—96; *Bérard*, ibid. 6 p. 228, Volumen der Pyramide. *E. Bobillier*, Correspond. *Quetelet* 3 (1827): Jede Ebene durch eine Mediane eines Tetraeders halbiert dasselbe.

N. Noël, ibid. 6 (1839) p. 61; Volumen bei Rotation eines Sektors oder Segments um eine äußere Achse. *Verdam*, ibid. 4 p. 209; Pyramidenstumpf durch Ebene, welche der Basis parallel ist, in gegebenem Verhältnis geteilt (im Anschluß an *Noël* p. 4).

Bary, *Gerg.* 21 p. 326, Kugelzone.

Paul Breton (Mechaniker), *Liouville* 2 (1837) p. 133; Oberfläche eines Zylinder- und Prismenstumpfes.

W. Matzka, *Grun.* 6 (1843) p. 113, Prisma. *Ch. v. Staudt*, *Crelle* 24 (1842) p. 252 (*Eckensinus*!). *M. Fink*, Nouv. annal. 7 (1848) p. 241: Cubature de quelques corps.

A. L. Crelle, *Crelle* 52 (1856) p. 175. Krumme Oberfläche und Volumen des Kugelausschnittes zwischen zwei beliebigen die Kugel und einander schneidenden Ebenen, verbessert von *E. Czuber*, *Crelle* 105 p. 180.

*Brinkley*sche Formel für den Mantel des schiefen Kreis-Zylinders, elementar von *Grunert, Grun.* 10 p. 222; $M = 2r$ multipliziert mit der Peripherie der Ellipse, deren Achsen, Seite und Höhe des Zylinders sind.

E. Prouhet, Pyramidenstumpf. Nouv. ann. 18 (1859) p. 208.

E. Lommel, Grun. 34 (1860) p. 286, Zylindermantel, der von einem anderen senkrecht durchschnitten wird.

B. Tortolini, Annali di matemat. 4 (1861) p. 175. Pyramidenstumpf und Mittelschnitt des Stumpfes, Schnitt durch den Schwerpunkt etc.

R. Hansen, Elementare Bestimmung des Volumens etc. *Tychsen* Tidsskrift (2) 5 (1869) p. 1.

Cayley, Tetraedervolumen, sehr einfach; London mathemat. society 2 p. 249.

L. Sohncke, Grun. 48 (1868) p. 457. Über die Körper, welche durch Rotation eines regulären Polygons um einen beliebigen Durchmesser entstehen.

E. D'Ovidio, Battaglini 9 (1871) p. 122. Kreis- und Kugelberechnung bei *Euklid* und *Archimedes.*

F. Dellmann, Schlöm. 8 (1863) p. 460; Volumenbestimmung regulärer Körper mit geringer Rechnung.

Moret Blanc, Nouv. annal. (2) 12 (1873) p. 474. Die Abstände eines windschiefen Vierecks schneiden sich, wenn die Produkte der vier Wechselabschnitte gleich sind; ders.: ibid. (1874) p. 347: Gemeinsames Volumen und Oberfläche zweier Zylinder mit gleichen Radien, deren Achsen sich schneiden, Formel von *Casimir Rey* bewiesen.

C. Gusserow, Programm Berlin (1882) Ostern. Die Inhaltsermittelung der Körper aus ihren Projektionen (Vermeidung des *Cavalieri*schen Prinzips, sowie der Integralmethode, benutzt die Willkür der Projektionsebene).

H. G. Zeuthen, Zeuthen Tidsskrift (5) 4 (1885) p. 175. *Euklid*'s und *Archimedes*' Methoden für Volumen der Pyramide nebst den modernen Methoden.

J. Sahulka, Stereometrische Verwandlungen (1888) Progr. Währing.

A. Höfler, Hoffm. 18 (1887) p. 1. Netz, Oberfläche und Volumen des Zylinderstutzes und der Kugel (Sinuskurve, *Cavalieri*sches Prinzip).

D. Besso, Besso periodico 4 (1889) p. 144. Methode des *Tartaglia* aus dem General trattato für das Volumen des Tetraeders aus den Kanten.

E. Lebon, Bourget (1895) p. 241. Sur le volume du segment de sphère. $\pi h \left(\varrho^2 - \frac{h^2}{12}\right)$, wo ϱ Radius des Mittelschnittes, aber schon *viel früher*: *Winkhaus, Crelle* 44 p. 375.

F. J., Bourget (1896) p. 33. Diese Formel und $\pi h \left(\varrho^2 + \frac{d^2}{12}\right)$ für die gleichseitige Hyperbel, und historische Notiz (*Maclaurin*). *Hildebrand, Hoffmann* (1900) p. 183. Kugelvolumen.

Emil Lampe, Spanisch im Progreso (1895); Teilung des Volumens und der Fläche eines gewöhnlichen Kegels (elementar).

Für die Frage nach der Volumenbestimmung ist der in dem 8. Band von *Gauß*' gesammelten Werken S. 240—249 veröffentlichte Briefwechsel zwischen *Gauß* und *Gerling* von hoher Bedeutung. Der oben erwähnte Beweis von *Gerling* (und *Stegmann*) steht im Brief vom 15. April 1844.

29. Sphärik. Die Sphärik des 19. Jahrhunderts knüpft an die Arbeiten *Lexell*'s von 1781 an (L.-Kreis), an *Euler* und an *Legendre,* dessen

Geometrie mit Noten an der Schwelle des Jahrhunderts steht; auch die *Gauß*schen Disquisitiones circa superficies curvas sind von großer Bedeutung. Das Hauptverdienst an der Entwickelung einer selbständigen Sphärik gebührt *Gudermann*, dessen niedere Sphärik von 1835 und dessen analytische Sphärik von 1830 durch zahlreiche Arbeiten im *Crelle* vervollständigt sind, und dessen Kugelkoordinaten auch von *Borgnet* und von *Killing* (*Weierstraß*) und (1841 Irish academy) von *Ch. Graves* und anderen, z. B. dem Referenten, benutzt sind. Von grundlegender Bedeutung ist dann die analytische Sphärik von *Möbius*. Dann aber ist die von *Riemann* ausgehende Form der Geometrie des endlichen Raumes von großem Einfluß, da sie de facto, soweit sie zweidimensional, mit der Sphärik zusammenfällt. Nicht minder wichtig sind die Disquisitiones circa superficies curvas fürs sphärische Dreieck.

Zusammenfassende Werke.

Th. St. Davis, Researches on spherical geometry London (1833). *K. F. Schulz*, Elementare Sphärik (1833). (Die Sphärik (1828/29)).

Chr. Gudermann, Lehrbuch der niederen Sphärik, Münster (1835); ders.: Grundriß der analytischen Sphärik (1830).

Rivart (*Puissant*), Traité de la sphère (Sacrobosco; lectio spherica) (1837).

Grunert, Sphärische Trigonometrie (1838).

A. Borgnet, Comptes rendus (1847) 15. Nov. p. 723; Mémoire présenté le 5. Nov.

R. Baltzer, Elemente der Mathematik (1853) Buch 5 § 4; reich an historischen Notizen.

A. Möbius, Analytische Sphärik (1846), Gesammelte Werke, Bd. 2, p. 1—34 „Über eine neue Behandlung der analytischen Sphärik."

B. J. Féaux, Traité élémentaire de la sphère, Programm Paderborn (1857).

A. Sannia e *E. d'Ovidio*, Elementi di geometria (Napoli) (1869).

G. B. Halsted, The elements of geometry (1885) von Planimetrie unabhängige Sphärik.

L. Huebner, Ebene und räumliche Geometrie des Maßes, Leipzig (1880) Kapitel 14.

Max Simon, Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig (T. 1. 1900) p. 16.

C. Alasia, Geometria e trigonometria della sfera, Milano (1900).

Eine ausführliche Sphärik unabhängig von der Planimetrie findet sich bei *J. J. Iselin*, Die Grundlagen der Geometrie, Bern (1891) und schon vorher bei *R. Most*, Programm Coblenz 1882/83.

Bolyai und *Lobatschefskij* definieren die Ebene mittels der Kugel. Ein kurzer Abriß der selbständigen Sphärik bei *R. E. Allardice*, Proceedings of the Edinb. mathemat. society 2 (1884) p. 8; bei *Allardice* unter anderem Beweis des *Lexell*schen Satzes.

Die Volumenberechnung vorzugsweise bei Volumen und Isoperimetrie (*Schwarz*). Über Kugelbündel und -büschel, sowie das *Apollon*ische Problem auf der Kugel ist die viel zu wenig bekannte Schrift von *Th.*

Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme (1879) ebenso elementar wie vollständig (s. Taktion).

Die Kugelteilung bei regulären Polyedern. Im übrigen vergleiche die Lehrbücher der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie, vor allem *Legendre*'s 7. Buch der Elemente. Die berührenden Kugeln des Tetraeders s. d.

Edelmann, Gergonne 3 (1813) p. 141; Fläche zwischen großem und kleinem Kreise (*onglet*), die sich unter bestimmtem Winkel schneiden.

P. Tédénat, Gerg. 6 p. 46. Inhalt des sphärischen Dreiecks mit Differentialrechnung.

Gergonne selbst, 13 p. 343: Volumen und Fläche der Kugel und ihrer Teile („fuseau" id est „Spindel", Bezeichnung des Kugelwinkels nach *Legendre*). Satz: Die Fläche eines Kugelvierecks von zwei Meridianen und zwei Parallelkreisen ist gleich dem gleichwinkligen Bogen des Äquators, multipliziert mit dem Abstand der beiden Parallelkreise.

A. Quetelet, Nouv. mémoires de l'académie de Bruxelles (1822), Correspond. *Quetelet* 7 (1832) p. 278; Inhalt sphärischer Figuren, begrenzt von Bogen von *kleinen* Kreisen; elementar-geometrische und historische Notizen (*D'Alembert, Bossut*), auf sphärische Polygone ganz allgemein ausgedehnt.

E. Lionnet, Nouv. ann. 3 p. 93, Volumen der Calotte).

Th. Olivier, Corresp. *Quetelet* 5 p. 324, p. 386, Théorèmes sur la division des surfaces etc.

Chasles, Correspond. *Quetelet* 5 (1829) p. 44. Schnittkurve einer Kugel und eines Umdrehungskegels, dessen Spitze auf der Kugel.

Querret, Gerg. 15 p. 87; Schnitt der drei Höhen; von *Gudermann* p. 68 niedere Sphärik, ohne Rechnung bewiesen. Idem l. c. Wenn zwei Diagonalen eines Vierseits Quadranten sind, so auch die dritte.

Mémoire sur la sphère par M . . .; Mémoires de Liège (Lüttich) (1826).

A. Quetelet, Correspond. *Quetelet* (et *Garnier*) 1 (1825) p. 80; Varianten von *Theodosius*; wenn die Kugelfläche gegeben, den Radius, Meridiane von gleichen Abständen etc. zu finden; vgl. *Perrinot,* Nouv. annal. 5 p. 187. Mit Lineal und Zirkel die Zentrale zweier Vollkugeln zu finden, dito *Lionnet,* ibid. 5 p. 252 und *Dormoy* p. 255. Ähnliche Aufgaben *E. Lionnet,* ibid. (2) 8 (1869), vgl. Mathesis 15.

Jacob Steiner, *Crelle* 2 p. 45: Verwandlung und Teilung sphärischer Figuren, durchaus elementar; hier die Vervollständigung des *Lexell*schen Satzes (s. sphärische Trigonometrie). *J. L. Raabe*, ibid. p. 9, sphärische Polygone (Koordinatentransformation). *Ch. Gudermann*, ibid. 6 p. 244; geht über die Grenzen des Elementaren, wie auch ibid., *Crelle* 8 p. 160. Elementar dagegen *Crelle* 8, p. 363; Verwandlung und Teilung. *S. Loewenstern, Crelle* 13 p. 79: In das Polarpolygon Kreis einschreiben (Grundkreis parallel, *Gudermann*scher Satz bewiesen).

Frz. Nauck, Über die harmonischen Proportionen auf der Oberfläche der Kugel, Programm Schleusingen (1847).

L. Thomas, Nouv. annal. 8 (1849) p. 279; Hauptkreisbogen kürzeste Linie.

V. A. Lebesgue, Nouv. annal. 9 (1850) p. 327: *Euklid*'s Tangentenkonstruktion für die Kugel. *Barbet,* ibid. 10 (1851) p. 415: *Elementarer Beweis,* daß der Hauptkreisbogen kürzeste Linie (s. auch sphär. Trigonom.), ein sehr einfacher, rein sphärischer Beweis, aber *vorher* durchaus elementar und *streng: C. F. A. Jacobi* (1834), *van*

Swinden's etc. Note zu p. 406; bei *Baltzer* in den oft zitierten Elementen Buch 5 § 4 p. 10.

R. Townsend, Nouv. annal. 9 (1850) p. 364 und desgl. *H. Faure,* ibid. 12 p. 446; Fläche des Dreiecks aus drei kleinen Kreisbogen.

E. Prouhet, ibid. 14 p. 152 (Bullet. de Bibliogr. histor.); Inhalt des sphärischen Dreiecks nicht von *Alb. Girard*, sondern von *Cavalieri*. *Vannson*, ibid. 17; eine Reihe von Artikeln.

Ch. Gudermann, Crelle 42 p. 280: Sphärisches „Rechteck" (gleiche Winkel, gleiche Gegenseiten), aus seinen beiden Seiten

$$\sin \frac{1}{4}\, i = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, b$$

datiert von *Gudermann*'s *Todestag!*

Graves, Solution of *Lexell*'s problem, *Messenger* 2 (1869) p. 68.

B. Niewenglowski, Nouv. annal. (2) 9 (1870) p. 26 (dreifache Inversion).

A. B. Evans, Educat. times 19 p. 30 Nr. 3755, hübscher Satz, Beweis von *Watson.*

G. Affolter, Grunert 57 (1874) p. 1: Zur Geometrie des Kreises und der Kugel.

W. W. Johnson, *Messenger* (1874) p. 14. Sind A, B, C und A', B', C' die Ecken zweier rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, so wird jeder dieser Bogen durch die beiden anderen in Punkten geschnitten, welche gleichweit von seinen Endpunkten entfernt sind; derselbe Analyst VII (1879) p. 31.

E. Meißel, Clebsch Annalen 15 p. 380, Beiträge zur Sphärik; ibid. 16 p. 529 (teilweise nicht elementar).

C. G. Colson, Educational times 25 (1876) p. 19; *Desargues*' Dreieckssatz auf der Kugel (*Gudermann*).

Maur. d'Ocagne, London mathem. society proceed. 18 p. 361. Sur une propriété de la sphère (analytisch). Es existiert eine lineare Relation zwischen den Abständen von m Punkten von einer Tangentialebene ($m > 3$).

A. Biehringer, Schlöm. 17 (1872) p. 255. Über die Kugelzone.

Mc. Adam, Analyst 4 (1877). Relationen zwischen den 15 Winkeln zwischen 6 Kugeln.

V. Jamet, Nouv. correspond. 5 (1879): Note sur la géométrie de la sphère. Theorie der Transversalen vgl. *Nauck* (1847).

D. Besso, Annuario del istituto tecnico, Rom (1883). Im sphärischen Dreieck folgt aus der Gleichheit zweier Mittellinien noch nicht die Gleichschenkligkeit, z. B. für das Dreieck

$$a = 144^\circ, \quad b = 120^\circ, \quad c = 90^\circ \text{ ist } m_a = m_b = a$$

(*E. Lampe*).

A. Steen, Zeuthen Tidsskr. 5 (1883) p. 84; Inhalt der Kugelzone. Ist p die kleinste und q die größte Sehne, welche zwei Punkte der Grenzkreise verbindet, so ist Zone $= \pi p q$. Hieraus die Formel $\sum_1^n \sin \frac{\pi}{2n}(2k-1) = \left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1}$.

L. Saltel, Mémoire de Bordeaux (2) 4 (1884) p. 375 Réflexion sur la mesure du volume de la sphère.

D. Besso, Periodico 1 (1886) p. 122. Sull' errore etc. (s. Trigonom.). Hauptkreisbogen kürzeste Linie aus dem Satz, daß $\sin a : a$ von 1 bis 0 beständig abnimmt, wenn a von 0 bis 180° wächst.

Steadman Aldis, Nature 39 (1889) p. 581 und 40 p. 417 (1889) Spher. eggs. Größte Anzahl gleicher Kugeln, welche in einen gegebenen Raum gehen. *Greenhill* weist ibid. 40 p. 10 auf *W. Walton*, Quarterly J. 9 (1868) p. 76 hin (wo das Problem gestreift, aber die Anzahl nicht bestimmt ist) und *G. D. Liveing* ersetzt ibid. p. 155 die Kugeln durch gleiche und ähnliche Ellipsoide.

C. E. Wasteels, Mathesis 12 (1892) p. 105; Inhalt eines sphärischen Dreiecks aus Bogen kleiner Kreise; desgl. *E. C. Hudson*, Quarterly journ. 27 (1895) p. 378, Fläche, ϱ und R (On a little spherical triangle).

P. Barbarin, Mathesis (1894) p. 57, p. 81. Constructions sphériques avec la règle et le compas. *J. Neuberg*, ibid. p. 163. Sur les triangles sphériques.

P. Barbarin, Association française, Bordeaux 24 (1895) p. 45—50. Application de la méthode de *Gergonne* à la sphère.

V. Sikstel, Grun. (2) 15 (1896) p. 150. Théor. fondamentaux de la géométrie sphérique.

A. Andreini, Periodico di matemat. 13 (1898) p. 138: Relazione fra l'area e la somma degli angoli di un poligono sferico qualunque

$$A = S - \pi\,(L - 2\,(\sigma - \gamma)),$$

wo S die Summe, L die Zahl der Ecken, σ Art und γ Geschlecht.

P. Mansion, Mathesis 16 p. 114. Wenn zwei sphärische Dreiecke proportionale Seiten haben, so sind die Winkel des kleineren Dreiecks kleiner als die des großen.

W. Briggs und *T. W. Edmonds*: On mensuration and spheric. geometry (1897).

Zur Sphärik gehört auch der *Luchterhand*sche Satz (vgl. auch *Crelle* 26 p. 26 *Möbius*): *Crelle* 23 (1842) p. 375. Wenn 5 Punkte auf der Oberfläche einer Kugel liegen, so haben die 5 Pyramiden, welche durch je 4 der Punkte bestimmt sind, die Eigenschaft, daß, wenn man den Inhalt jeder solchen Pyramide mit dem Quadrat der Entfernung des jedesmal übrig gebliebenen von einem beliebigen sechsten multipliziert, die Summe von dreien der Produkte gleich der Summe der beiden anderen (algebraische Summe = 0). Entsprechender Satz für die Ebene (4 Punkte auf einem Kreis).

H. Besondere räumliche Beziehungen.

30. Tetraeder. An die Arbeiten von *Euler* (Petersburg [1758]), *Lagrange* (Berlin [1773]), *Gua* (Paris [1783]) schließt *Carnot* an mit dem Mémoire sur la relation qui existe entre les distances de cinq points pris dans l'espace; hierin eine rechnerische Behandlung des Tetraeders, vor allem Ausdruck der Kanten und Flächenwinkel etc. durch die 6 Kanten, die Relation selbst kommt in Aufgabe 36 vor als Gleichung zwischen den 10 Strecken und hat 130 Glieder, ist aber symmetrisch. Es folgen die entscheidenden Arbeiten von ***Monge,*** rein geometrisch und elementar: Correspond. *Hachette* sur l'école polytechnique 1 (1808) 10. April. Hier: Gegenkanten, das umgeschriebene Parallelepipedon, das konjugierte Tetraeder etc. Hier schon die Spezialfälle, daß ein Paar Gegenkanten gleich, zwei Paar, alle drei; idem: ibid. (1809) Jan. p. 1—6. Der Schwerpunkt des Tetraeders ist in der

Mitte der Geraden, welche die Mitten zweier Gegenkanten verbindet. (*Monge* spricht zwar in der ersten Abhandlung den Satz aus, daß diese 3 Linien 2 konjugierte Durchmesser des Ellipsoids sind, welche das umschriebene Parallelepipedon in den Mitten der Seitenflächen berührt, der Ausdruck *Achsen* wird aber erst in dem Mémoire: *Gerg.* 1 p. 353 von *M. J. L.* eingeführt.) Wenn A, B, C die Medianen und a, b, c die Winkel, welche sie einschließen, so ist das Volumen V des Tetraeders:

$$V = \frac{1}{3} ABC \sqrt{1 - \cos^2 a - \cdots + 2 \cos a \cos b \cos c}$$

und wenn A' etc. die kürzesten Abstände der Gegenkanten sind und α_1 etc. die Winkel, so ist

$$V = \frac{1}{3} A'B'C' : \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cdots + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Ibid. (1811) Jan. p. 263 zeigt er den analogen Satz zum Dreieckssatz OSH:

Wenn man durch die Mitten der Kanten 1. Ebenen $\perp$ zur Kante legt, so gehen alle 6 durch das Zentrum O der Umkugel. 2. Ebenen durch die Gegenkanten, so gehen alle 6 durch den Schwerpunkt S. 3. Ebenen $\perp$ zur Gegenkante, so gehen alle durch einen Punkt O', (*Monge*scher Punkt), das Zentrum der Umkugel des konjugierten Tetraeders und O, S, O' *liegen in einer Geraden* und S in der Mitte.

J. D. Gergonne, ibid. 2 p. 96 beweist statisch ohne alle Rechnung den Satz, daß sich die 4 Medianen in *einem* Punkt schneiden und: *Hachette* ibi. 2 p. 261 elementar den Satz von *Monge* aus Teil 1: Das Tetraeder ist $\frac{1}{3}$ eines Parallelepipedons.

J. F. François, Ensheim, ibid. 1 (1808) 9. Jan. p. 346; Schnitt, der das Tetraeder halbiert und kleinste Fläche hat; *Abonné, Gerg.* 1 p. 230; dieselbe Aufgabe; es ist ein Schnitt durch ein Paar Achsen, aber in dem Mémoire sur le tetraèdre par *M. J. L.* wird nachgewiesen, daß dieser Schnitt kein eigentliches Minimum ist. Es werden *Monge*sche und *Euler*sche Sätze einfach bewiesen, und der Satz von *Servois* (vor 1810), der immer wiederkehrt:

$$6\, V = a a' \delta \sin (a a'),$$

wo a und a' Gegenkanten, δ ihr Abstand und (aa') ihr Winkel. V durch die 6 Kanten findet sich schon bei *Euler* in den Novae commentationes Petropolitanae für 1752 und 53 p. 158 (1758), wie bei *Meyer Hirsch,* Geometrische Aufgaben 2 (1809) p. 112, wo sich überhaupt viel Material findet.

Carnot, Géométrie de position (1803) No. 262; Kosinussatz für Tetraeder: Wenn M, N, P, Q die Seitenflächen, so ist:

$$Q^2 = M^2 + N^2 + P^2 - 2NP\cos m - 2PM\cos n - 2MN\cos p,$$

wo m, n, p die Dieder (Keile) sind, welche M etc. gegenüberliegen, einfacher Beweis von *Hachette*, Correspond. *Hachette* 1 p. 415.

L'Huilier, Gerg. 2 p. 72. Radius der Umkugel durch 3 zusammenstoßende Kanten und die Winkel ihrer dreiseitigen Ecke; vorher *Legendre,* Note 5, 3. Aufl. der Elemente (1800). *L. A. S. Ferriot,* ibid. p. 133, Analogie entre le triangle et le tétraèdre, p. 180 Würfel und Tetraeder.

Bérard, Gerg. 6 p. 225. Ein- und umgeschriebene Kugel.

J. B. Durrande, Gerg. 5 (1815) p. 301. Tetraeder mit Kantenkugel.

Vecten, Gerg. 8 p. 139. Im „tétraèdre trirectangle" geht das Lot auf die Hypotenuse durch H des Hypotenusendreiecks. *Gergonne* 9 Quest. p. 116 p. 277, Lösung von *Durrande* etc. Wenn P ein beliebiger Punkt und PA die Gegenfläche in A' schneidet, so ist:

$$\sum \frac{PA}{AA'} = 1.$$

J. V. Poncelet, Traité, article 582, Sätze über perspektivische Tetraeder.

Querret, Gerg. (1823). Einfacher Beweis, daß Tetraeder von gleicher Höhe sich wie ihre Basis verhalten (*Kepler*).

Ch. Sturm, Gerg. 15 p. 330, Gleichung zwischen den Kosinus der Winkel, welche von 4 beliebigen Richtungen im Raum gebildet werden.

J. Steiner, Crelle 1 p. 38. Analogie zum ebenen Dreieckssatz bei Viereck im Raum (*Desargues'* Satz).

K. W. Feuerbach, Grundriß zur analytischen Untersuchung der dreieckigen Pyramide, Nürnberg (1827), darin Maximaltetraeder. Bedingung, daß die 4 Höhen sich schneiden, wie bei *L'Huilier*, De mutua capacitate:

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2.$$

Resultate zum Teil ohne Beweis, Methode wie bei *Lagrange* (1773).

E. E. Bobillier, Gerg. 18 p. 244. Im allgemeinen unmöglich, den 6 Kanten die Richtung vorzuschreiben. Beweis des Volumens (*Servois*) durch *Timmermans* und *P. Lenthéric,* elementar-geometrisch (s. auch Volumen).

Steiner, Crelle 2 p. 97; fehlerhafter Satz über das Schneiden der Höhen (s. *Heis, Grun.* 32) und die Betrachtung der 8 Berührungskugeln und der Relationen zwischen den Radien (s. auch *Gerg.* 18).

Th. Scheerer, Crelle 6 p. 98, elementarer Beweis des Halbierungssatzes aus *Gerg.* 1; Maximaltetraeder aus 3 in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten ist das rechtwinklige.

J. H. T. Müller, Disquisitiones de Tetraëdro, Naumburg (1831). Sehr viele Sätze über Tetraeder finden sich ii *C. F. A. Jacobi's* Bearbeitung des *van Swinden* (1834), Anhang zu Buch 10, 11 und 12.

C. A. Bretschneider, Grun. 1 (1841) p. 1. Tetraedertrigonometrie (Volumen durch 3 Seitenflächen und die drei von einer derselben mit den übrigen gebildeten Neigungswinkel).

R. Hoppe, Grun. 3 (42) p. 213. Volumen aus 3 Seitenflächen und den Winkeln, welche eine von ihnen mit den 3 andern bildet.

Ch. v. Staudt, Crelle 24 (1842) p. 252. Volumen durch 6 Kanten in symmetrischer Form, p. 255. *Eckensinus.*

G. Flemming, Grun. 10 (1846) p. 326, Satz von *Monge O, S, O', S* als

innerer Ähnlichkeitspunkt (M wird nicht genannt; Bedeutung von O' nicht bemerkt).

E. Brassinne, Nouv. annal. 6 (1847) p. 226. $6\,VR = J$, wo J der Inhalt des Dreiecks aus aa', bb', cc', welche Formel aber schon von *Crelle*, Sammlung mathematischer Aufsätze Bd. 1 p. 117, Berlin (1821); Beweis von *Perrodil* p. 396.

G. Dostor, ibid. (2) 12 p. 367.

J. H. F. Müller, Grun. 7 (1847) p. 319 (Analogie zum *Ceva*).

R. Baltzer, Grun. 16 p. 125. Berechnung der Kugel aus 3 Kanten und ihren Winkeln; *Crelle*scher Satz, s. *Brassinne* mit Quellenangabe.

G. Junghann, Studien über das sphärische Dreieck, Programm Luckau (1848).

J. H. T. Müller, Betrachtungen über das Tetraeder mit seinen Berührungskugeln, Programm Wiesbaden (1852).

A. Maur, Grun. 19 (1852) p. 121. Über die Entfernungsörter des Tetraeders (s. Dreieck: *Jacobi*).

Fz. Unferdinger. Grun. 28 (1856) p. 97. Radien der Hauptberührungskugeln.

E. Heis, Grun. 3 p 41. Stehen 2 Paar Gegenkanten ⊥, so auch das dritte; steht ein Paar ⊥, so schneiden sich die beiden Höhenpaare aus den Enden je einer der Kanten; Verbesserung des *Steiner*schen Satzes in *Crelle* 2, 97.

J. Mention, Nouv. annal. 18 p. 204. Das Produkt der Sinus zweier entgegengesetzten Keile (Dieder) ist proportional dem Produkt der Kanten dieser Winkel.

F. Joachimsthal (*Liersemann*): *Grun.* 32 (1859) p. 109: Die 4 Höhen auf einem Hyperboloid. Sind 2 Paar Gegenkanten ⊥, so auch die dritte (vgl. *Hachette, Crelle* 1 und *Monge* und *Heis*). *Crelle* 40 p. 21: Application des déterminants à la géométrie, dort *Crelle*sche Formel für R, p. 45 die Formel

$$\sum d_k^{-2} = \sum h_k^{-2},$$

wo d_k Abstand zweier Gegenkanten.

G. Junghann, Grun. 34 (1860) p. 369, besonders § 16 die Formel 3 über den Eckensinus. Ders. *Tetraedrometrie*, 2 Teile Gotha (1862—63). 1. Teil: Geometrie, dreidimensionaler Eckensinus, Polareckensinus, Modul etc. 2. Teil: Die Eckenfunktionen in Verbindung mit den Längen, Flächen und Körpergrößen, Tetraeder, dessen 6 Kanten eine Kugel berühren (ohne sphärische Trigonometrie). Einige Sätze schon bei *Crelle,* Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen, Berlin (1821).

J. Wolstenholme, Quarterly journ. 3 (1860); p. 89 vgl. *Heis* oben. *N. Ferrers* ibid. p. 145. Die gegenseitige Neigung zweier entgegengesetzten Kanten durch die Längen aller Kanten sehr einfach:

$$\left(\cos\Theta = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}\right)$$

v. Staudt, Crelle 57 (1860) p. 88, sehr einfach, die *Crelle*sche Formel.

V. A. Le Besgue, Nouv. annal. 20 (1861) p. 63. Généralisation d'un théorème de *Robert*; sind a, b, ... die Flächen, a', ... die Lote auf einer Ebene von den Gegenecken, ist ϱ der Abstand des Zentrums der Inkugel, so ist:

$$W = aa' + \ldots = 3\,V\varrho r^{-1}.$$

P. Serret, Liouv. (2) 7 (1862) p. 377. De quelques analogies de la géométrie du plan à celle de l'espace (orthogonales Tetraeder, *L'Huilier*'s Maximalsatz).

E. Prouhet, Nouv. annal. (2) 2 (1863) p. 132. *Feuerbach* entsprechende

Kugel (s. d.) bei Tetraeder mit Höhenschnitt [vgl. dazu *C. Intrigila*, Sul tetraedro, Napoli Rendiconti (1884)].

W. Stammer, Grun. 46 p. 334. Im Tetraeder mit senkrechten Gegenkanten schneiden sich die 4 Höhen als Spezialfall der allgemeinen Bedingung für das Schneiden von Ecktransversalen.

V. Janni, Battaglini 6 (1868) p. 371. 2 Pyramiden sind gleich, wenn sie gleiche und ähnlich angeordnete Kanten haben.

H. Faure, Nouv. annal. (2) 11 (1872) p. 86. Satz: $A_1 A_2 A_3 A_4$ sei das Tetraeder, O ein Punkt, $V_1 = A_2 A_3 A_4$, so ist:

$$\Sigma \overline{OA}_1{}^2 V_1{}^2 + 2\Sigma OA_2 \cdot OA_3 \cos \widehat{A_2 O A_3} \cdot V_2 V_3 = 0 \text{ (Carnot?)};$$

P. F. Compagnon, ibid. p. 268: Volumen der Pyramide, ihres Stumpfes; Versuch einer einfachen Begründung durch Spezialfall einer Pyramide mit Parallelogramm als Basis.

Abel Transon, ibid. (2) 12, (1873) p. 519. Analogie zum Sinussatz; desgl. *Dostor, Grun.* 56 (1874) p. 247. Tetraederflächen wie die Sinus der gegenüberliegenden Polarecke; ders. Nouv. annal. (2) 13 (1874) p. 563 *Kantenkugel*; wenn je 2 Gegenkanten dieselbe Summe haben, und wenn ϑ_1 etc. ihre Winkel, so ist:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta_2}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta_3}{2} = 1;$$

dazu *C. Hellwig, Grun.* 58 (1875) p. 180.

Beweis der *Servois*schen Formel für V von *F. Klein,* mitgeteilt von *Sigm. Günther* (s. Volumen), *Grun.* 56 (1874) p. 25.

G. Dostor, ibid. 57, p. 113—185: Determinanten (*Joachimsthal, Feuerbach*).

E. Genty, Nouv. annal. (2) 17 (1878) p. 223. Exercice sur le tetraèdre. Sätze über das Tetraeder, dessen Gegenkanten gleich sind und das also begrenzt ist von 4 kongruenten Dreiecken. Die Medianen seien α, β, γ und zugleich die Abstände, und es ist:

$$2\alpha^2 = b^2 + c^2 - a^2 \text{ und } 3V = \alpha\beta\gamma,$$

und die merkwürdigen Punkte O, S und O' (Punkt von *Monge*) fallen zusammen. Von *Genty* ohne Beweis, den *Chefik-Bey,* ibid. (2) 19 p. 403 gibt, und *E. Lemoine* p. 133, der die Sätze schon auf dem Congrès zu Nantes (1875) mitgeteilt hat und dazu den Satz: Wenn die 4 Seitenflächen äquivalent sind, so sind sie kongruent.

*J. Mister*scher Satz, Nouv. correspond. 3 (1876) bewiesen. In jedem Tetraederstumpf (mit parallelen Basen) schneiden sich die Geraden, welche eine Kantenmitte mit dem Schnitt der Diagonalen der Gegenfläche verbinden.

Maurice d'Ocagne, Bourget (1878) p. 238. Volumen des Pyramidenstumpfes.

R. Hoppe, Grun. 61 (1878) p. 87. Über rationale Dreikante und Tetraeder.

L. *Klug*, ibid. p. 361. Über die Kugeln, welche die Flächen des Tetraeders berühren.

Hermary, Société mathémat. de France, 7, p. 138 (1879), Berührungskugeln.

V. Jamet, Nouv. correspond. (1879) p. 385. Satz über Kollinearität der Schnitte der Kanten einer Fläche durch die äußere Halbierungsebene des entgegengesetzten Dieders, Beweis von *E. Cesàro,* ibid. 1880 p. 90; vgl. aber *Gergonne* 3 p. 196 und 317.

L. Cauret, Nouv. correspond. (1879) p. 176. Wenn eine Kugel einer n-seitigen

Pyramide eingeschrieben ist, so fallen die Berührungspunkte zusammen, sobald man ihre Seiten auf die Basis niederklappt, und der gemeinsame Punkt ist dann von den Projektionen der Spitze gleich weit entfernt.

M. Escary, ibid.? Dem Tetraeder lassen sich innen und außen 48 Würfel einschreiben, wenn alle Kanten ungleich sind. Beziehungen zwischen den Kanten der Würfel und des Tetraeders.

J. Neuberg, Nouv. correspond. 6 (1880) p. 8. Über die Anzahl der Kugeln, welche 4 sich schneidende Ebenen berühren. 8 möglich, stets 4 wirklich, aber die „Dachkugeln" nur wirklich, wenn für die Flächen:

$$\alpha + \beta \neq \gamma + \delta; \quad \alpha + \gamma \neq \beta + \delta; \quad \alpha + \delta \neq \beta + \gamma.$$

Es gibt zwei, wenn z. B.:

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta; \text{ eine, wenn:}$$

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \text{ und } \alpha + \gamma = \beta + \delta; \text{ keine, wenn:}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta. \quad \text{Ist: } \alpha = \delta,\ \beta = \gamma,$$

d. h. sind die Seitenflächen paarweise gleich, so gibt es 2 Paar Gegenkanten, die gleich, ihre Mediane ist ihr Abstand: Konstruktion der Berührungspunkte etc. [s. aber Programm von *Müller* (1852)].

H. Vogt, Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, Programm Breslau (1881) *Heis*sche Sätze, *Feuerbach*sche Kugel. Ders., *Crelle* 92 (1882) p. 32. Über die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren. Wenn die Summe zweier Seitenflächen gleich ist der der beiden andern, so liegen die 4 Berührungspunkte in einer Ebene; 4 beliebigen Geraden lassen sich 8 Kugeln anschreiben (vgl. *Steiner, Crelle* 32. Über ebene Tangentenvierecke).

T. C. Lewis, Messenger (2) 11 (1881—82) p. 36. Tetraeder mit Höhenschnittpunkt. Sätze von *E. Temperley,* ibid. p. 114: 4 gleiche Kugeln um die 4 Seitenflächen, deren Zentrum halben Abstand wie die Gegenecken hat etc.

F. Schur, Clebsch Annalen 19 (1882) p. 430. Der *Desargues*sche Satz vollständig verallgemeinert: Jeder Geraden, welche die 4 Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier als entsprechend gesetzten Tetraeder schneidet, entspricht eindeutig eine Gerade, welche die 4 Schnittlinien entsprechender Seitenflächen schneidet und umgekehrt.

E. Temperley, Messenger 11 (1881) p. 114. Die wesentlichen Analogien zum *Feuerbach* H, S, O kollinear etc.

Delpit, Bourget (1881) p. 337. Wenn 2 Paar Gegenkanten $\perp$, dann auch das dritte (*Hachette Heis, Joachimsthal*). Es gibt 2 Kugeln der 12 Punkte.

Ad. Schmidt, Schlöm. 29 (1884) p. 321. Das gleichseitige Tetraeder, sehr reichhaltig (z. B. die Summe der Kantenwinkel an jeder Ecke 2 Rechte); aber viel, was schon von *Genty*, *E. Lemoine,* Congrès de Nantes (1879); *Neuberg,* Mathesis 2; dazu *Besso,* Periodico 1 (1886): Über gleichseitiges Tetraeder, p. 173, Nouv. correspond. 2. p. 144 gesagt ist.

Cayley, Collected papers, vol. 5 p. 359.

J. Wolstenholme, Educational times 43 (1885) p. 39 No. 7509. Ist s_1 die Summe der 3 Kanten in A und S_1 die der 3 Kantenwinkel, so ist, wenn:

$$s_1 > s_2 > s_3 > s_4 \text{ auch } S_1 > S_2 > S_3 > S_4.$$

J. Neuberg, Mémoire sur le tétraèdre, mémoires couronnés de l'académie de Belgique in 8° (1884); sehr bedeutend (Bulletin (3) 7 p. 284) Mathesis 5, supplément 1 (1885) 1—72 u. a. Ermittelung der Analogien zum *Lemoine-Grebe-*

*Adams*schen Punkt; ders., Liège Mémoires (2) 11 (1884); sur les tétraèdres de *Möbius*.

Malet, Educational times 44 (1886) 8047. Zieht man durch die Ecken eines Tetraeders 4 Parallelen, welche die Gegenflächen in A' etc. treffen, so ist $A'B'C'D' = 3ABCD$; dazu *J. Neuberg* 8116.

M. Cantor, Mathesis (1888) p. 133. Schnitt eines trièdre trirectangle durch beliebige Ebene ABC, dann $\cot A : \cot B : \cot C = OA^2 : OB^2 : OC^2$.

D. Besso, Periodico 4 (1889) p. 144. Tetraedervolumen aus den Kanten nach der Methode von *Tartaglia*.

P. H. Schoute, Tetraeder begrenzt von 4 nicht gleichschenkligen gleichförmigen Dreiecken, er findet eine *zweite* Art, (erste bei *Genty*), Amsterd. Versl. en Meded. (1889) p. 462.

J. Lauvernay, Bourget (1890) p. 217. Dreikant aus 3 Winkeln konstruiert.

G. Riboni, Periodico 5 (1890) p. 1. Contributo allo studio del tetraedro.

1. Ist in einem Tetraeder: $a^2 + d^2 = b^2 + e^2 = c^2 + f^2$, so Höhenschnittpunkt.

2. Ist noch $ad = be = cf$, so gehen die Höhen durch denselben Punkt wie die Geraden, welche die Ecken mit den Zentren der Inkreise der Flächen verbindet.

3. $a + d = b + e = c + f$, so Kantenkugel, und es gibt 6 andere Kugeln, von denen jede eine Kante und die Verlängerungen der 4 sie schneidenden berührt.

4. Gehen in einem Tetraeder die Geraden, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der Inkugel verbinden, durch einen Punkt, so sieht man von ihnen aus die Kanten unter gleichen Winkeln.

R. Hoppe, *Grun.* (2) 9 (1890—91) p. 434. Höhenschnitt-Tetraeder mit rationalen Kanten; ders., *Grun.* (2) 10 (1891) p. 102. Relation der Flächenwinkel des Tetraeders. *Grun.* (2) 12 (1894) 327: über gleichseitige Tetraeder. 1. Alle 4 Seiten gleich, 2. kongruent, 3. Gegenkanten paarweise gleich, 4. Höhen alle gleich; Bedingungen sind gegenseitig; (2) 16 (1898) p. 257, p. 333 gleichseitiges und orthozentrisches Tetraeder; kommt beides zusammen, so regulär; aber sehr viel, was schon bekannt war.

G. de Longchamps, Mathesis 10 (1890) p. 49, p. 77. Orthozentrisches Tetraeder. Zusammenstellung der Eigenschaften.

Bernès, Bourget (1891) p. 49. R als Funktion der Kanten. Jede Kugel durch 3 Ecken schneidet die Kanten der vierten so, daß das entstandene Dreieck von konstanter Form (Seiten proportional dem Produkt der Gegenkanten).

A. Droz-Farny, Mathesis 13 (1893) p. 247. *Servois*sche Formel aus der fürs Prismatoid; dito *Appell,* Mathesis 14 p. 40, einfache Ableitung.

Morley, Educat. times 61, p. 26, No. 12 032 (1894). Die 5 Zentren der Kugeln, welche die Seitenfläche eines Tetraeders mit gleichen Gegenkanten berühren, sind das Zentrum eines (*Monge*) Parallelepipedons und die 4 nicht zum Tetraeder gehörigen Ecken desselben; ibid. 11961 *Neuberg*.

Arnold, Educat. times 70 (1899) p. 31 No. 13 774, Kugel, welche 3 zusammenhängende Kanten eines regulären Tetraeders und die Verlängerung der anderen berührt $\varrho = R/\sqrt{3} = r\sqrt{3}$.

J. A. Third, System of spheres connected with the tetrahedron. Edinb. math. soc. Proceed. 17 (1899) p. 108.

Über rationale Tetraeder.

K. Schwering, Crelle 115 (1895) p. 301. Kanten und Inhalt:

z. B. $a = 30$, $b = 21$, $c = 17$, $f = 5$, $g = 18$, $h = 24$, $V = 240$;

zugleich rationale Vierecke, Vereinfachung von *Kummer*'s Arbeit in *Crelle* 37 p. 1.

31. Polyeder (s. auch *Euler*schen Satz). Die meisten Arbeiten übersteigen das Gebiet der Elementargeometrie und gehören in die Topologie oder in die Analysis, so z. B. das grundlegende Werk von *V. Eberhard*: „Zur Morphologie der Polyeder" (1891) und die Arbeiten von *Hermes*, Köllnisches Gymnasium, Berlin, auch *Wiener*, Vielecke und Vielflache, und nicht minder *Max Brückner*, Theorie und Geschichte, Leipzig (1900), wo sich so ziemlich die gesamte Literatur findet. Es erschien, als meine Sammlungen abgeschlossen waren, doch konnte ich es noch verwerten. Historisch ist: *Siegmund Günther*, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften Kap. 1: Die Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyedern in der Neuzeit, Leipzig (1876). Viel Material ist auch in den (kristallographischen) Arbeiten *Hessel*'s (Artikel „Kristall" in *Gehler*'s physikalischem Lexikon), *Bravais*, *Marx*, Geschichte der Kristallographie. Karlsruhe (1825). *P. Groth*, Physikalische Kristallographie, Leipzig (1876) u. a.

Die wesentlichsten Errungenschaften sind die Sternpolyeder *Poinsot*'s oder *Kepler*'s und die Polarkörper zu denen des *Archimedes*, überhaupt die strikte Durchführung des Dualitätsgesetzes. An den Hauptarbeiten sind Frankreich, Deutschland, England beteiligt. Von *Listing* (siehe *Euler*schen Satz) abgesehen, steht dem Dreigestirn: *Hessel*, *Heß*, *J. K. Becker* in Frankreich *Poinsot*, *Cauchy*, *Camille Jordan* gegenüber und in England *Cayley* und *Kirkman*. Der Elementarmathematik gehören die zahlreichen Arbeiten *L'Huilier*'s an.

Die Schule beschränkt sich im wesentlichen auf die einfachen Folgerungen aus dem *Euler*schen Satz, wie sie meist *Euler* selbst in der 1. Abhandlung der Novae commentationes von 1758 gezogen hat und wie sie sich in *Baltzer*'s Elementen, diesem Schatz der Schulen, nicht bloß der deutschen, finden, ferner auf die gewöhnlichen bei *Euklid* behandelten regulären Polyeder, allenfalls die halbregulären (*Archimedes*) Polyeder, und geht auch wohl gelegentlich auf die Sternpolyeder ein; besonders seitdem *Wiener* ihre Netze und Bilder zeichnete, reproduziert bei *Heis-Eschweiler* und *S. Günther*.

Unter Polyeder verstehen wir mit *J. K. Becker* einen von n ebenen Flächen völlig begrenzten und überall zusammenhängenden Raum,

aber meist die Oberfläche eines solchen. Sind alle Begrenzungspolygone einfach zusammenhängende (im Sinne *Riemann*'s, d. h. jeder in sich zurücklaufende Schnitt auf der Fläche schneidet ein Stück aus), und ist auch die Gesamtoberfläche einfach zusammenhängend, so ist das Polyeder ein *Euler*sches Polyeder, und kommt kein Flächenwinkel (Dieder) $> \pi$ vor, so nennen wir das Polyeder mit *Poinsot* konvex; ist es endlich ein konvexes *Euler*sches Polyeder und liegt ganz an einer Seite jeder Begrenzungsebene, so wird es mit *Möbius* kugelartig genannt.

Louis Poinsot, Mémoire sur les polygones et les polyèdres, lu à la I classe de l'institut (1809) 24. Juli; journal de l'école polytechn. cah. 10 p. 16—76 (1810), auch Mémoires de l'institut, Savants étrang. II, an XI, sehr elementar und klar. Einleitung: Die Probleme gehören in die Geometrie der Lage (*Leibniz, Euler*, Rösselsprung, Berliner Memoiren (1759), *Vandermonde*). I. Polygone, ganz allgemeine Definition: geschlossener Streckenzug, Winkel der Polygone, Ufer durch Färbung unterschieden wie bei *Meister* (s. Inhalt). (Interessant ist, daß *Poinsot* noch π für $\frac{1}{2}\pi$ gebraucht). Definition des Begriffs „Art" (Zahl der Umdrehungen $= h$.). Anzahl der verschiedenen Arten (siehe reguläre Polygone). Polyèdre étoilé; Winkelsumme $S = 2\pi(m - 2h)$; die höchste Art, wenn sie existiert, $= 2\pi$, d. h. also $= \pi$. Er kennt den Zusammenhang mit der Kreisteilung und (II 15) mit der Kreisteilungsgleichung. Es scheint, daß ihm *Gauß*' Disquisitiones arithmet. von 1801 bekannt waren. Dann geht er auf die Seilpolygone ein, um in III auf die regulären Sternpolyeder zu kommen. Man kennt bis jetzt nur 5 vollkommen reguläre Polyeder, gestaltet (formés) mittels gleicher und regulärer Polygone von gleicher Neigung und in gleicher Anzahl um eine Ecke gelagert, unter der Beschränkung, daß jede körperliche Ecke (Angle solide) $< 4R$. Aufhebung der Beschränkung. Scharfe Definition von Fläche (Hedra bei *Euler*, face bei *Poinsot*), Kante und Ecke. *Flächen* sind die Ebenen, welche in kleinstmöglicher Anzahl das Polyeder fertigstellen (achever); *Kanten* sind die Seiten selber, welche die Flächen begrenzen und längs deren sich 2 Flächen verbinden; also $2k = f$. Nur an diesen Kanten liegen die Raumwinkel (Dièdres). Nur an der Stelle, wo sich zwei Kanten vereinen, liegt eine *Ecke*.

Es gibt neue Polyeder, konvex in dem Sinne, daß kein Dieder > 180. Unterschied ist, daß *das zugehörige Kugelnetz die umschriebene Kugel mehrfach bedeckt, aber überall gleich vielfach* (Art des Polyeders). Also sei n die Seitenzahl des regulären einfachen Polyeders,

welche man anwenden will, a eines der Dieder, so ist die Oberfläche eines Netzpolygons $na - 2n + 4$ Oktanten. Ist H die Anzahl der Flächen, E die Anzahl der Male der Kugelbedeckung, so ist $H(na - 2n + 4) = 8E$.

Sei q die Anzahl der Winkel a um denselben Punkt der Kugel und e die Anzahl von 4 Rechten, die Art der Ecke, so ist $qa = 4e$, also $a = \frac{4e}{q}$, und man erhält (p. 37) die Gleichung *Poinsot's*:

$$H(ne\frac{4}{q} - 2n + 4) = E \cdot 8.$$

Diese Gleichung mit 5 Unbestimmten gibt alle regulären Polyeder, welche mit ordinären Polygonen als faces möglich sind; dabei muß e prim zu q und $2e < q - 1$ sein. *Poinsot* gibt nun die Lösungen:

$$n = 3,\ q = 5,\ e = 2;\ H = 20,\ E = 7,\ \text{Eckenzahl } 12$$

$$\text{und: } n = 5,\ q = 5,\ e = 2;\ H = 12,\ E = 3;$$

20-flächiges Sternzwölfeck und 12-flächiges Sternzwölfeck. Die beiden andern, die *Kepler*schen Polyeder, das 20-eckige Sternzwölfflach und das 12-eckige Sternzwölfflach, für welche die Formel nicht gilt, erhält er auf geometrischem Wege (s. u. *Cauchy*). Der Anhang gibt dann den erweiterten *Euler*schen Satz (vgl. Nr. 32).

Die beiden letzten Körper sind von *Kepler*, Harmonice mundi (2) 26 beschrieben, ihre Netze und Bilder gezeichnet. *Baltzer*, Berliner Monatsberichte (1861) p. 1046 (1862) reklamierte sie für *Kepler*, und *Wiener*, Bemerkungen über die regulären Sternvielflache, *Schlöm.* 12 (1867) p. 174, beschuldigt *Poinsot* fast des Plagiats, da er aus der Harmonice unmittelbar vor der entscheidenden Stelle wörtlich eine andere zitiert, die sich auf die *Archimed*ischen Polyeder bezieht.

S. Günther (l. c.) hat den Bericht *Terquem's*: Nouv. annal. 46 nicht verstanden, der mit der bei ihm so selbstverständlichen Loyalität *Kepler* und sogar p. 138 *Wentzel Jamnitzer* (1568), Perspectiva corpor. regul. sein Recht gibt. Vgl. dazu *M. Simon*, Straßburg, Archiv (*Grun.*) (3) 7, p. 109 (1904).

Poinsot spricht § 40 aus, daß es schwierig sein würde, die verschiedenen möglichen neuen regulären Polyeder zu bestimmen, und wirft die Frage auf, ob andere 4-, 6-, 8-, 12- und 20-Flächner möglich sind.

Diese Lücke füllte *Augustin Cauchy* aus.

I. Mémoire: Recherches sur les polyèdres, lu à la I classe de l'institut (1811) en Février; Journal de l'école polyt. t. 9 (1813) cah. 16 p. 68. I. Teil: Lösung der Frage von *Poinsot* 40. Wie die Polygone höherer Art gebildet werden, indem man die Seiten der ge-

wöhnlichen vom selben Grade (*Cauchy* versehentlich espèce statt ordre) verlängert, so entstehen die Polyeder höherer Art, indem man die Flächen oder Kanten der *Euklid*ischen verlängert. So das Sterndodekaeder 2. Art (*Poinsot*, 3. nach *Wiener*), wenn man im gewöhnlichen Dodekaeder die Kanten der 12 Pentagone verlängert (*Kepler*).

Wenn man im gewöhnlichen Dodekaeder die Ebene, welche jede einzelne (chaque) Fläche enthält, fortführt bis zu der einfachen Begegnung mit den fünf Ebenen der fünf Flächen, welche die entgegengesetzte Fläche umgeben, so erhält man das Dodekaeder 3. Art umgrenzt (franz. besser: compris = inbegriffen), wie das gewöhnliche von Fünfecken 1. Art (*Poinsot*). Wenn man in diesem Dodekaeder 3. Art die Kanten verlängert, so erhält man das Dodekaeder 4. (7.) Art (*Kepler*).

Man erhält das Ikosaeder 7. Art, indem man jede einzelne Fläche des gewöhnlichen Ikosaeders fortführt, bis sie die Ebenen der 3 Dreiecke trifft, welche die entgegengesetzten Flächen umgeben. Beweis der Unmöglichkeit weiterer regulärer Polygone dadurch, daß der Kern zu einem einfachen regelmäßigen Kugelnetz gehört, worauf eigentlich schon *Poinsot* hingewiesen hatte. 2. Teil: *Euler*scher Satz (s. d.).

II. Mémoire: ibid. p. 77, lu à la séance du 20. Janvier (1812). Beweis des *Euklid*schen Satzes in Buch 11, Definition 9 der Elemente. 1. Teil: 8 Sätze über die Variation der Winkel in geradlinigen und sphärischen Polygonen (konvex im gewöhnlichen Sinne, daß sie ganz auf einem Ufer jeder Seite liegen) bei Konstanz der Seiten. 2. Teil: Théorie sur les angles solides et les polyèdres convexes (kugelartig). Folgerung aus dem *Euler*schen Satze und Theor. 13 der Satz: In einem konvexen Polyeder, dessen Seitenflächen invariabel, sind die Neigungswinkel der Seitenflächen auch invariabel, so daß man mit denselben Flächen (in ders. Reihenfolge) nur ein symmetrisches zweites konvexes Polyeder konstruieren kann. Damit ist *Euklid* 11, Definition 9 und 10 bewiesen. *Die Arbeiten von Poinsot und Cauchy sind durchaus elementargeometrisch.* Correspondance *Hachette* 2 (1812) Juli p. 361—367 finden sich die Rapporte von *Malus* (1811) 6. Mai und *Legendre* (1812) 17. Febr. *Legendre* hatte den Satz in einzelnen Fällen bewiesen (Élém. de géom.).

Das Referat von *Terquem* (1849) ist schon erwähnt; es ist dann von *J. Dienger* (Karlsruhe) breiter wiedergegeben, *Grun.* 13 p. 343: Über Sternpolygone und Sternpolyeder nach *Poinsot*, deutsch. (Über *Poinsot* vgl. *Tédénat*, Nouv. annal. 3.)

Cauchy's Beweis des *Euklid*ischen Satzes ist von *Thibault*, Nouv. annal. 2 (1843) p. 163 bedeutend vereinfacht; den Beweis, daß die vier die einzig möglichen regulären Polyeder höherer Art sind, wiederholt *J. Bertrand*, Comptes Rendus 46 (1858) p. 79, p. 117 Note etc. mit Benutzung eines Gedankens *Poinsot*'s (43): Die Ecken eines regulären Polyeders höherer Art sind zugleich die Ecken eines regulären Polyeders erster Art.

Cayley, Edinb. and Dublin philos. magazine (4) t. 17 p. 123. On *Poinsot*'s four new regular solids. Die *Kepler*schen und die *Poinsot*schen sind polar (wie

Oktaeder und Würfel etc.); richtige Bestimmung der Art der *Kepler*schen Polyeder.

Chr. Wiener, Vielecke und Vielflache (1864). Zum erstenmal (abgesehen von *Kepler* und *Jamnitzer*) die Bilder der neuen Körper, Geschichte und sehr viel eigene Arbeit, zumal in den Definitionen, auch für Polygone.

Ant. Steinhauser, Die Netze der *Poinsot*schen Körper, Programm Graz (1871).

G. Dostor, Grun. 62 p. 78, Les trois sphères des polyèdres réguliers étoilés.

Th. Hugel, Die regulären und halbregulären Polyeder mit 113 stereoskopischen Figuren), Programm Neustadt a. d. H. (1876) (irrtümlich ein 10. reguläres Polyeder).

E. Heß, Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder, eine Fortsetzung der entsprechenden Schrift für Polygone von 1874 und Zusammenfassung und Erweiterung seiner Arbeiten in den Marb. Berichten. Eine Würdigung von *Heß* findet sich bei *Brückner* p. 204.

E. Heß, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung, Leipzig (1883); grundlegendes Werk, vgl. *Brückner*.

C. Koch, Correspondenz für die Gelehrten und Realschulen (1887). 3/4. Heft: Über reguläre und halbreguläre Sternpolyeder. Tübingen (1887).

Euklidische reguläre Polyeder.

(Tetraeder s. d.) Die Benennung der Polyeder geschieht auf Vorschlag *Euler's* vorzugsweise nach der Flächenzahl, ohne Rücksicht auf die Seitenzahl der begrenzenden Polygone.

A. M. Legendre, Éléments de géométrie (1798) etc. (sphärische Trigonometrie).

Meyer Hirsch, Geometrische Aufgaben (1807) 2. Teil.

Flaugergues, Gerg. 2 (1811) p. 357. Relation entre le dodécaèdre et l'icosaèdre régulier inscrits à une même sphère.

L'Huilier, Gerg. 3 p. 169. Bestimmung der möglichen fünf regulären Polyeder, ihrer Ecken-, Flächen-, Kanten-Zahl, Art der Polygone und Ecken aus dem *Euler*schen Satz: ibid. p. 233; Existenz und Konstruktion der regulären Polyeder aus der Zerlegung in reguläre Pyramiden, deren Spitze im Zentrum; desgl. zwei *Archimed*ische Körper (polar), s. u.

Abonné, Gerg. 9 p. 321—44, d. h. *Gergonne* selbst (wo in den Ann. nicht Anfangsbuchstaben stehen, ist fast immer *Gerg.* selbst der Verfasser). Recherches sur les polyèdres réguliers et semi-rég. *Dualität.*

C. F. A. Jacobi, van Swinden (1834); besonders metrische Relationen; Konstruktionen von Polyedern ineinander; dort p. 394 die Aufgabe, durch einen Würfel einen gleich großen durchzuschieben, die von *Prinz Ruprecht von der Pfalz* gestellt und praktisch gelöst, von *Wallis* theoretisch, und dann als Maximalaufgabe (größten Würfel durchzuschieben) von *Nieuwland* gelöst ist. (p. 542).

F. Schultze, Crelle 28 (1844) p. 108. Allgemeine Berechnung der fünf Körper. Kugelteilung.

A. Hohl, Die Lehre von den Polyedern. Tübingen (1841). 2. Aufl. (1881).

H. Breton, Grun. 6 (1845) p. 111; Beweis des Satzes von *A. S. Lévy:* Wird Ecke S des regulären Oktaeders von Ebene $A'B'C'D'$ geschnitten, so ist:

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SC'} = \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SD'}.$$

J. Steiner, Crelle 31 p. 90. Satz vom Oktaeder (s. Stereometrie).

Fischer (Bayreuth), *Grun.* 11 (1848) p. 158. Einige Bemerkungen über reguläre Polyeder: Wenn ein Körper eine In-, eine Um- und eine Kanten-Kugel hat (Kantenkugel fehlt bei *Euklid*), so ist er regulär. *Fischer* ist für die Schule noch heute brauchbar, vgl. auch *Meyer Hirsch* (l. c.), und oft ohne Quellenangabe benutzt.

Cauchy, Comptes rendus 26, p. 517 (1848) 15. Mai. Drei Sätze über reguläre Polyeder. Ein Radius der Umkugel steht $\perp$ auf verschiedenen Polygonen, auf die sich alle Ecken außerhalb des Radius verteilen lassen.

Die Lehrbücher von *E. F. August* und *J. T. H. Müller,* siehe bei Lehrbücher.

C. Wicke, Grun. 25 (1855) p. 131: Über das Ikosaeder und Pentagondodekaeder, *Achsen.*

B. Sommer, Grun. 32 (1859) p. 289. Radien der In- und Umkugel etc.

Heis und Eschweiler (1867); s. Stereometrie (auch Sternpolyeder als Anhang).

L. A. Sohncke, Grun. 47 (1869) p. 59, sehr elementare Konstruktion der regulären Polyeder, vgl. *Meyer Hirsch.*

P. H. Schönemann (Halle), *Schlöm.* 18 (1873) p. 387. Ikosaeder und Sterndodekaeder (die Ecken des Ikosaeders liegen in drei kongruenten senkrechten Achsenrechtecken).

H. Heilermann, Hoffmann 9 (1876) p. 186. Die fünf regulären Vielkante etc.

Joh. Schubert (als Student; Schüler von *Chr. Wiener*), *Schlöm.* 20 (1875) p. 460; Beziehungen zwischen den Projektionen des regulären Zwölf- und Zwanzigflachs.

G. Dostor, Grun. 59 (1876) p. 50. Idem: *Liouville* (3) 5 (1879) p. 209 (auch vier Sternpolyeder elementar, Kantenkugel etc.); auch *Bourget* (1877) p. 134, 167, 228.

E. Heß, Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder (1876) (allgemeiner als die regulären Polyeder), s. oben.

Hugel, s. oben.

E. Cesàro, Nouv. correspond. 6 (1880) p. 118. Existenzbeweis wie schon bei *Baltzer* und noch etwas früher *L'Huilier, Gerg.* 3.

H. M. Jeffery, London Roy. Society proceed. 13 (1882) p. 105. Theorems relating to the regular polyhedra analogous to those of Dr. *Matthew Stewardt* on the regular polygons. Von den Ecken und dem Zentrum der Umkugel mit Radius a seien Lote $p_1, \cdots, p_n$ und p auf eine Ebene gefällt, so ist

$$\sum (p_\nu)^m = \frac{n}{2(m+1)a}\left\{(p+a)^{m+1} - (p-a)^{m+1}\right\}$$

für alle fünf, wenn $m = 1, 2, 3$; für Ikosaeder und Dodekaeder, wenn $m = 4 = 5$.

2. Für einen beliebigen Punkt sei d_ν die Distanz von einer Ecke und v vom Zentrum, so ist

$$\sum (d_\nu)^{2m} = \frac{n}{2(m+1)v}\left\{(v+a)^{2m+2} - (v-a)^{2m+2}\right\}.$$

E. Heß, Kugelteilung (1883) p. 22.

O. Löwe, Über die regulären und *Poinsot*schen Körper und ihre Inhaltsbestimmung mittels Determinanten (1883).

F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleich. 5. Grades (1884) (algebraisch).

E. Hénard, Comptes rendus 101 p. 282. Sur les seize réseaux des plans de l'icosaèdre régulier convexe (1885).

E. Barbier, ibid. p. 304. Observations etc. *Hénard* knüpft an *Cauchy* (l. c.) an, der sagt, daß man 7 aufeinanderfolgende Netze aus dem Ikosaeder gewinnen kann. *Hénard* gewinnt 8, *Barbier* sagt: *bekannt*, und gibt einige Eigenschaften der Netze an.

E. Zeppenfeld, Projektion der regulären Polyeder; Programm Elberfeld (1884).

E. Barbier, Table des principaux éléments des dix (?) figures polyèdriques régulières. Compt. Rend. (1885) 101, p. 562.

R. Hoppe, Grun. (2) 4 (1886) p. 441, reguläre Pyramiden und Polyeder.

J. E. A. Steggall, Edinb. *M. S.* proceed. 7 (1889) p. 66. Note on the regular solids. Existenzbeweis der 5; p Punkte gleichförmig auf der Kugel zu verteilen; aber *Heß* (1883) *nicht* beachtet.

E. Cesàro, Lisboa Memorias (1888). Forme poliedr. regolari e semiregolari (in tutti gli spazii). Es gibt 18 Arten von Polyedern, bei denen die Seitenflächen in derselben Ordnung ($k - 2$) in jeder Ecke mit gleicher Anzahl zusammenstoßen, und polarer Satz.

Fr. Roth, Beiträge zur Stereometrie; Programm Buxtehude (1890) (nicht elementar).

Herm. Wiener, Herstellung der Platonischen Körper aus Papierstreifen. Katalog *Dyck,* München (1893) Nachtrag. *J. Cernesson, Bourget* (1894). Dodekaeder und Ikosaeder, Grundriß und Aufriß und daraus Berechnung der Gleichung zwischen Kante und Radius ϱ des Umkreises der Seitenfläche.

G. Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik Teil 1 (1895) ders.: *Elemente der Stereometrie* (1899 und 1900). In beiden Büchern eigenartige Behandlung.

Die Archimedischen Körper, ursprünglich die gleicheckigen, von kongruenten regulären Polygonen verschiedener Art begrenzten halbregulären *P*, welche *Pappus* (bis auf die Prismen) aufzählt als *Archimed*ische; neuerdings auch ihre polaren, von kongruenten Polygonen und regelmäßigen Ecken verschiedener Art begrenzt; die *Archimed*ischen Körper erster Art $= A$, die der zweiten $= A'$.

Die Schule behandelt von den A's wohl nur die durch Abstumpfen der Kanten eines Tetraeders und des Würfels auf $^2/_3$ entstandenen 8- und 14-Flächner, abgesehen vom Prisma und von gleichflächigen nur den durch Aufsetzen der Pyramiden auf den Würfel entstandenen. Doch findet sich in *Hauck*s Lehrbuch der Stereometrie eine konstruktive Ableitung sämtlicher A's und in *Lampe*s Progr. „Geometr. u. mechan. Aufg." (Berlin 1885) eine einheitliche Berechnung aus gegebener Kante ohne sphärische Trigonometrie.

Meyer Hirsch, Geometrische Aufgaben T. 2 (1807), sehr einfache Ableitung der A aus dem *Descartes*schen Satz (s. u.), auch schon zwei gleichflächige A'.

N. J. Lidonne, (1808) Anschluß an *Kästner*'s große Arbeit über die A; vgl. *M. Simon* oben bei *Poinsot.*

Gergonne 9 (1819) p. 321. Recherches sur les polyèdres. Dualistisch, A durch Abschneiden von den Ecken, A' durch Aufsetzen auf die Flächen.

A. Hohl, Die Lehre von den Polyedern, Tübingen (1841) mit Tafeln der Netze.

J. T. H. Müller, Trigonometrie (1852). Die *A* durch Kugelteilung, p. 345 die polaren der *A*, kurz aber alle.

A. Bravais, présenté à l'académie des sciences (1848) 11. Dec. Comptes rendus 29 (1849) p. 133; Rapport von *Cauchy*. *Liouville* 14 (1849) p. 137: Mémoire sur les polyèdres de forme *symétrique* (*Ostwald*'s Klassiker Nr. 17). Eine hochbedeutende Arbeit, welche vom krystall. Gesichtspunkt ausgehend zunächst Systeme von geraden Punkten (rangé), deren Netze etc. betrachtet, aber nicht oder doch nur sehr zum kleinen Teil in die Elementargeometrie hineingehört; doch gibt sie Veranlassung, die Symmetrie und die Achsen der Polyeder genauer zu betrachten. *Bravais*' Arbeiten sind jetzt auch ins Deutsche übersetzt von *C.* und *E. Blasius* (1899).

E. Catalan, Journal de l'école polytechnique 41. Heft (1865) p. 1. Die Preisarbeit (ehrenvolle Erwähnung) (s. *Euler*schen Satz). Die *A* des *Pappus* (inkl. der beiden Prismen) und ihre polaren, aber unabhängig voneinander behandelt, obwohl *Catalan* die polare Beziehung (reziproke) kennt. Teilung der Kugel in reguläre Polygone verschiedener Art und Teilung in gleiche Polygone, so daß die Winkel an jeder Ecke der Reihe nach gleich sind, Ableitung auseinander. Die Arbeit ist ein Vorläufer von *Heß' Kugelteilung* (sphär. Trigon.).

K. Heinze, Die halbregelmäßigen Körper, Programm Köthen (1868), *ohne* sphärische Trigonometrie, Ableitung der *A*, Oberflächen- und Inhaltsbestimmung, s. auch die von *Lucke* herausgegebene *Heinze*sche Stereometrie.

Ch. Hessel, Marburger Berichte (1871). Übersicht der gleicheckigen Polyeder und Hinweisung auf die Beziehung dieser Körper zu den gleichflächigen. *Neue* Arten halbregulärer Körper.

E. Heß, Über die möglichen Arten und Varietäten einiger *A* Körper, Marburger Berichte (1872) (Teil 1 behandelt die gleicheckigen und die gleichflächigen Polygone). Teil 2: Die desgleichen Polyeder. Idem ibid. (1875): Über zwei Erweiterungen des Begriffs der regelmäßigen Körper. 1. Diskontinuierliche, z. B. Ring zwischen zwei konzentrischen. 2. Polyeder, welche kongruente, oder symmetrische Flächen und Ecken haben, die aber nicht reguläre sein müssen. Diese und andere Arbeiten zusammengefaßt in: Über die *zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder*, Kassel (1876). Über vier *Archimed*ische Polyeder höherer Art, Kassel (1878) etc. Alles zusammengefaßt in das Hauptwerk: Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung, Leipzig (1883). „Das Studium des Werkes ist für jeden, der in diese Materie tiefer eindringen will, unentbehrlich" (*Brückner*). Um gestaltliche Vorstellung besonders der sternförmigen *A* zu erleichtern, schrieb *Heß*: Über Polyeder-Kaleidoskope; Marburger Berichte (1882), *Dyck*'s Katalog (1893).

A. Badoureau, Comptes rendus 87 (1878) p. 823 (Mémoire sur les figures isoscèles). Anknüpfend an *Gerg.* 9 werden die durch Nullsetzen des Nenners, der die *Archimed.* Körper liefert, erhaltenen ebenen Netze untersucht. Die Arbeit betrachtet dann Polyeder höherer Art.

J. Pitsch, Zeitschrift für Realschulwesen, Wien (1881). Über halbreguläre *Stern*polyeder (aber später als *Heß*). Zusatz 6 (1882) halbreguläre Sternpolyeder mit fünfseitigen Ecken.

A. E. Cesàro, Forme poliedr. etc. (s. oben); 4. Teil *n* dimensional (1888).

F. Panizza, Periodico 3 (1888). Nota sui pol. etc. dito.

Einige Werke siehe bei den regulären Polyedern; es versteht sich,

daß die *A* Körper bei *Wiener* (auch schon vorher bei *Baltzer*) und sehr ausführlich bei *Brückner* behandelt sind.

Die Arbeit *V. Eberhard*'s, Zur Morphologie der Polyeder, Leipzig (1891), so hochbedeutend sie ist, und die von *Fedorow*, Grundlagen der Morphologie und der Systematik der Polyeder (russisch) (1893) gehören in die Morphologie.

Allgemeine Eigenschaften.

Schon *Euler* zeigte den Zusammenhang seines Satzes (Nr. 32) mit dem *Descartes*schen. „Im kugelartigen Polyeder ist die Winkelsumme der ebenen, die Flächen bildenden Polygone $w = (e - 2)\,4R$"; also nur von der Eckenzahl abhängig; direkter Beweis bei *Cauchy* (l. c.), bei *L'Huilier*, *Legendre* etc. Ist das Polyeder $(2m + 1)$fach zusammenhängend, so ist der Faktor $e - 2$ um $2m$ zu vermehren (*L'Huilier*).

Die Folgerungen aus dem *Euler*schen Satze, besonders über die Zahlen der dreieckigen, viereckigen etc. sind von *Euler*, *Cauchy*, *L'Huilier*, *Legendre*, *Gergonne* [15] etc. (l. c.) gezogen. Siehe auch *R. Baltzer*'s Elemente der Mathematik und *Jacobi*, *van Swinden* (1834) Anhang p. 436 ff., der sich übrigens unabhängig von *Hessel* der Bezeichnung *Euler*sche Polyeder für die kugelartigen bedient. Schon *Euler* hat in der ersten Abhandlung (s. Nr. 32) bewiesen, daß es kein Polyeder mit nur 6 flächigen Ecken und kein siebenkantiges gibt.

Cauchy bewies, daß ein gewöhnliches Polyeder durch die Seitenflächen völlig bestimmt ist (s. oben). *Legendre* bewies in den Éléments de Géométrie, daß, wenn das Netz eines Polyeders gegeben ist, im allgemeinen soviel Bestimmungen als das Polyeder Kanten hat, also k zur Bestimmung des Poleders genügen, also z. B. die Längen der Kanten. Der *Legendre*sche Satz ist dann von *Catalan* (l. c.), *Hoppe*, *Grun.* 55, 217, *H. Schubert*, *Grun.* 63, p. 97, *Rausenberger*, Elementargeometrie etc. (1887) bewiesen.

Die allgemeine Theorie der Polyeder gehört in die Morphologie und für die zahlreichen Arbeiten von *Cayley*, *Poinsot*, *Möbius*, *Kirkmann* *Eberhard*, *Hermes* etc. verweisen wir auf *Brückner*, sowohl: Vielecke und Vielflache, als schon (1897) Programm, Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache, Zwickau, sehr viele Abbildungen; auch *C. Reinhardt*, der sich um den *Möbius*schen Nachlaß große Verdienste erworben, Programm Meißen (1890): Einleitung in die Theorie der Polyeder (auch für die Theorie der Sternpolygone wichtig, Farben zur Unterscheidung der Ufer).

32. Eulerscher Satz. Als Grundsatz der Lehre von den gewöhnlichen kugelartigen Polyedern lautet er in Deutschland meist

$$e + f = k + 2,$$

wo e die Zahl der Ecken, f die der Seitenflächen, k die der Kanten bedeutet (vgl. aber *J. K. Becker*).

Der Satz ist von *Euler*, Novi commentarii etc. Petropol. 4 (ad ann. 1752—53) (1758) publiziert, zunächst in der für die Schule ganz und gar verwendbaren Abhandlung Elementa doctrinae solidorum p. 109—140 als Prop. 3 § 33 in der Form: $S + H = A + 2$ (Angula solida $= S =$ Zahl der körperlichen Ecken, $H =$ Hedra $=$ Fläche, $A =$ Acies, Plural Acieres $=$ Kante). *Euler* setzt hinzu: Fateri equidem cogor me huius theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non potui. Aber in der angeschlossenen Arbeit: Demonstrat. nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, in der auch das Volumen des Tetraeders durch die sechs Kanten ausgedrückt ist (*Joach. Jungius*), gibt er von 141—153 den Beweis indem er durch sukzessives Abschneiden einer körperlichen Ecke, wobei die Zahl $e+f-k$ konstant bleibt, die Frage auf das Tetraeder zurückführt. Der Beweis ist durch und durch elementar und leicht verständlich. Er deutet vorher auch schon den Beweis an, den Körper aus Pyramiden zusammenzusetzen wie das Polygon aus Dreiecken, den später *L'Huilier* ausgeführt hat. Er zeigt auch den sich gegenseitig bedingenden Zusammenhang zwischen dem *Euler*schen Satz und dem von *Descartes*: Die Winkelsumme W der planen Winkel ist $(e-2)4$ Rechte.

Der Satz galt als *Euler*sches Eigentum, bis *E. Prouhet* am 23. April (1860) die Pariser Akademie aufmerksam machte auf eine von *Leibniz* stammende Abschrift einer Notiz von *Descartes*, gedruckt in den oeuvres inédits von *Foucher de Cerreil*, Paris (1860). *Prouhet* gab mittels Normalen auf die Flächen von einem Punkt aus den Beweis des *Euler*schen Satzes aus dem Satz über W; aber erst *Baltzer*, Berliner Monatsberichte 1861 p. 1045 wies nach, daß der von *Prouhet* nicht mitgelesene Schluß den Beweis von *Descartes'* Kenntnis des *Euler*schen Satzes lieferte, die z. B. *J. K. Becker*, *Schlöm.* 14 (1869) noch bezweifelt. Man vgl. auch *de Jonquières*, C. R. 110, mehrere Noten (s. u.).

Indessen hat *Euler*, der, wo er konnte, Quellen angab (*Fermat*sche Satz bei Kreis) a) den Satz nicht gekannt, b) hat er ihn, und mühsam genug, bewiesen. Gekannt aber hat *Archimedes* schon den Satz, wie *Baltzer* und *Günther* (Vermischte Untersuchungen) bemerken, da er sonst unmöglich die halbregulären (gleicheckigen) Polyeder alle (bis auf die unbestimmten) hätte aufstellen können, und, wie *Günther* wahrscheinlich gemacht hat, auch *Cardano*; aber *Euler* hat ihn *bewiesen* [in der Natur des *Archimedes* lag es freilich, Sätze, die er experimentell gefunden, zu beweisen, und den Beweis *Euler*'s hätte er ebenso gut geben können].

Nach *Euler* hat sich auch *Castillon* mit dem Satz beschäftigt und sodann *Legendre*, der in den Elementen einen für kugelartige (*Möbius*) Polyeder geltenden Beweis mittels des Ausdrucks für den Inhalt eines sphärischen Polygons gab, und derselbe Beweis findet sich bei *Meyer Hirsch*, Geometrische Aufgaben Teil 2 (1807) p. 93 (und bei *Heß*, Kugelteilung p. 191). Wie *L'Huilier* sehr richtig bemerkt, ist aber die Einfachheit nur scheinbar, da der Beweis die Sphärik voraussetzt.

Gleichzeitig sind dann *Cauchy* und *L'Huilier* zu erwähnen und vor beiden *Poinsot*, Nachtrag zu der Arbeit über die Sternpolyeder (s. oben), p. 46—48, der den *Euler*schen Satz für Polyeder höherer Art beweist. *Poinsot* gibt die Tragweite des *Legendre*schen Beweises an und dehnt ihn aus auf den Fall, daß die Kugel mehrfach („E“fach) bedeckt wird, aber die begrenzenden Polygone alle erster Art sind; er erhält

$$S + H = A + 2E.$$

Cauchy, Mémoire (s. oben Nr. 31) Teil 2 p. 77: Wenn man ein Polyeder in so viel andere zerlegt, als man will, so ist, indem man beliebig eine Ecke im Innern annimmt, falls P die Anzahl der neuen Polyeder ist: $S + F = A + P + 1$; als Folge davon ergibt sich der *Euler*sche Satz und als Spezialfall der Satz vom ebenen Netze:

$$S + F = A + 1.$$

Dieser wird jetzt direkt bewiesen, indem man alle Polygone des Netzes in Dreiecke zerlegt, oder durch den Schluß von n auf $n + 1$.

Der Beweis ist schon in der correspondance sur l'école polytechn. (*Hachette*) t. 2 N. 3 vom 3. Janv. (1811) (der bekannte Beweis, von *Grunert*, *Arch.* 47)) gegeben; widersprechend ist, daß er hier schon auf das im Februar gelesene Mémoire verweist.

L'Huilier, *Gerg.* 3 (1812) p. 169—189; Auszug von *Gergonne* und Zwischenbemerkungen *Gergonne*'s. Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstr. directe du théorème d'*Euler* et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti. Die Arbeit stammt vermutlich von 1809; sie gibt zwei Beweise:

1. schon von *Euler* angedeutet, durch Zerlegung von einem inneren Punkt aus in Pyramiden, und

2. durch Projektion des Körpernetzes auf eine Ebene. Die Winkelsumme des Projektionsnetzes läßt sich dann leicht doppelt ausdrücken und liefert den Satz.

Gergonne beweist dann streng den *Descartes*schen Satz über die Summe der Kantenwinkel ($4e - 8$). Es schließen sich dann zwei Sätze von *Français* an p. 189—191 über die Summe der Angul. solid. (Ecken) und der Dieder. Der zweite Beweis ist von *J. Steiner*, der generaliter mit den *Gerg.*schen Annalen gut bekannt war: *Crelle* 1 p. 364 *reproduziert*, wie der *Cauchy*sche von *Grunert*, *Crelle* 2 p. 367; er findet sich u. a. bei *Mehler* nämlich der zweite, von *Steiner* reprod. *B.* und ist in den Schulen der gewöhnliche.

L'Huilier geht schon auf die Ausnahmen ein. Das Polyeder kann aus i einzelnen *Euler*schen Polyedern bestehen, es kann von o „Kanälen" durchbrochen sein, es kann von $1, 2, 3 \cdots$ Polygonen begrenzt sein, die jedes in sich p_1, p_2 etc zur Grenze gehörende Polygone enthalten; dann ist

$$e - k + f = 2(i - o + 1) + \sum p.$$

Chr. Hessel, Crelle 8 p. 19; Nachtrag zum *Euler*schen Satz. Ausnahmen, Zusammenstellung von Polyedern, die sehr ähnlich sind, und wo für das eine der *Euler*sche Satz gilt, für das andere nicht. Idem: *Quaestiones stereometricae potissimum ad theorema Euleri,* Marburg (1831), ganz eigenartiger Beweis.

Schulz v. Strassnicki, Crelle 14 p. 83 zeigt, daß die Ausnahmen von Aufsetzungen und Aushöhlungen herrühren.

Ch. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg (1847) § 4 (so einfach und kurz der Beweis ist, er wird von den Schülern nicht erfaßt).

J. B. Sturm, Grun. 24 (1855) p. 114 Nr. 4.

Cayley (l. c.) verbessert die *Poinsot*sche Formel durch Definition des Inhalts eines Sternpolygons (s. Inhalt) und findet die allgemein gültige Formel:

$$eS + e'H = A + 2D.$$

E. F. August, Programm (l. c.) (1854), Fußnote (im wesentlichen *Euler*).

P. A. Kirkman, Lit. and phil. society, Manchester (1855) p. 47. On the Repres. and Enumerat. of Polyhed. Das *Euler*sche Polyeder aus einem prismatischen Körper so durch Schnitte hergeleitet, daß $e + f - k$ konstant bleibt.

J. B. Listing, Einleitung zum Zensus räumlicher Komplexe. Unter Zensus versteht er die Kunst zu zählen; er gab dem Satz die allgemeingültige Fassung, die ihn mnemotechnisch leicht behaltbar macht. Gibt man der Ecke die Dimension 0, der Geraden 1, der Fläche 2 und dem Raum 3, so lautet der Satz: Die Gesamtzahl der geraden Begrenzungsstücke ist gleich der der ungeraden. *Listing* macht auf die Unbestimmtheit von *L'Huilier*'s Zahlen aufmerksam, die er in dem Zensustheorem, der denkbar größten Verallgemeinerung des *Euler*schen Satzes, beseitigt. Derselbe: *Zensus räumlicher Komplexe,* Göttingen (1862), vielleicht die bedeutendste topologische Arbeit. (Er hat unabhängig von *Gauß* und *Riemann* die Bedeutung der Zahl p erkannt.)

A. Cayley, Philosoph. magazine 21 p. 424. On the partition of a close (1861). Verallgemeinerung des *Euler*schen Satzes auf einen geschlossenen Linienzug in der Ebene oder auf der Kugel.

J. K. Becker, *Grun.* 38 (1862) p. 315: Zur Polyedrom.; desgl. 40 (1863) p. 12 (s. unten).

E. Catalan (l. c.) 2—25 Folgerungen aus dem *Euler*schen Satz (*Legendre*scher Satz, s. oben).

A. Möbius, Sächsische Berichte Bd. 15 (1863) p. 18. Gesammelte Werke Bd. 2 p. 433. Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders Bd. 17 (1865) p. 31 (s. Inhalt). Dazu der von *C. Reinhardt* herausgegebene Nachlaß. So hoch bedeutend die Arbeiten sind (einseitige Fläche), so gehören sie trotz des Titels nicht in die Elementargeometrie. Sie sind wie die Arbeit *Catalans* durch die Preisaufgabe der Pariser Akademie hervorgerufen, für deren Lösung die Arbeit von *Möbius,* weil sie nicht verstanden wurde, den Preis nicht erhielt. Sie stammen

aus 1858. *Stäckel* hat Math. Annalen 52 (1899) p. 598 auf die Priorität oder auf die Gleichzeitigkeit und Unabhängigkeit der Entdeckung der einseitigen Fläche durch *Listing* hingewiesen.

L. Matthießen, Schlöm. 8 (1863) p. 449, Über die scheinbaren Einschränkungen des *Euler*schen Satzes, ordnet alle Polyeder dem Satze unter.

Schäffer, Schlöm. 9 (1864) p. 363. Erweiterung bei nicht einfach zusammengesetztem Netze.

Camille Jordan, *Crelle* 66 (1866) p. 22. Recherches sur les polyèdres. Begriff des „Aspects“, Einteilung der *Euler*schen Polyeder in neun Klassen nach der Symmetrie (*Bravais*). *Crelle* 66 p. 86. Résumé etc. Sur la symétrie des polyèdres non eulériens. Fortsetzung: *Crelle* 68 p. 297 und Note sur la symétrie inverse des polyèd. non eulériens (Rapport von *Bertrand*, Comptes rendus 62 (1866) p. 1268, und *Brückner* im Anhang). Er führt wohl als erster den *Riemann*schen Begriff des Zusammenhangs einer Fläche in die Polyederlehre ein. (Die Arbeiten sind aber nicht elementar.)

Thieme, Brief an *Baltzer* (1867) 10. Nov. Petersburg, mitgeteilt 3. Aufl. (1870) p. 213, vgl. Bemerkung zu *Staudt*.

J. K. Becker, Schlöm. 14 (1869) p. 65. Nachtrag p. 337.

Scharfe Definition von Polygonen nach *Riemann*, schließt Sternpolygone aus, aber nicht mehrfach zusammenhängende; dito Polyeder p. 69. Die Zahl D der Dreiecke, in welche sich die Oberfläche des Polyeders durch Diagonalen zerlegen läßt, ist bei einfachem Zusammenhang der Oberfläche und ihrer Seitenflächen $D = 2$ $(e - 2)$, wo e Zahl der Ecken. Dies ist der Fundamentalsatz, aus dem unmittelbar der *Descartes*sche Satz und ebenso unmittelbar, da $D = 2k - 2H$ ist, der *Euler*sche folgt. Ein Polyeder ist n-ter *Klasse*, wenn es durch n Grenzflächen im Innern in zwei getrennte Teile geteilt wird, deren Oberfläche einfach zusammenhängend ist.

$$D = 2\,(e + 2n - 4);$$

auf *diesen* Satz ist der Zusammenhang der einzelnen Seiten *ohne* Einfluß; ferner erweiterter *Euler*scher Satz, wenn sämtliche Flächen erster Art sind:

$$f + e = k + 4 - 2n.$$

Folgerungen fünf Gleichungen. Ein Polyeder ohne dreiseitige Ecken und dreiseitige Flächen kann nicht von der Art 1 sein; gehört es in Klasse 2, so hat es nur vierseitige Ecken und Flächen. Schluß: Polyeder höherer Klasse mit gleichvielseitigen Ecken $(3 + \alpha)$ und gleichvieleckigen Flächen $3 + \beta$; dann:

$$k = 2\,(n - 2) + \frac{4\,(n - 2)\,(\alpha + \beta + 1)}{\alpha\beta + \alpha + \beta - 3},$$

wobei

$$k > 6\,(n - 1), \quad \alpha \text{ und } \beta = < 4.$$

1. Nachtrag p. 337—348. Inzwischen hat *Becker Jordan* kennen gelernt.

C. Jordan, Oberfläche, die von m geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Linien begrenzt und von solchem Zusammenhang ist, daß man n geschlossene sich selbst nicht schneidende Linien auf ihr ziehen kann, ohne sie zu zerstücken, ist vom Typus (m, n), und es ist:

$$S + F = A + 2 - m - 2n.$$

Becker zeigt dann, daß sich jedes ebene oder windschiefe e-Eck durch $e - 3$ Diagonalen in $e - 2$ Dreiecke zerlegen läßt, wobei es einerlei ist, wie man die Diagonalen zieht, wenn sie sich nur nicht schneiden.

2. Nachtrag: ibid. 18 (1873) p. 328. Werden alle mehr als dreiseitigen Ecken eines Polyeders von $(2n + 1)$fachem Zusammenhang in Dreikante zerlegt, so ist die Anzahl aller dieser $x = 2f + 4(n - 1)$. *Schlöm.* 19 p. 459. Aufhebung der Beschränkung, daß der Umfang sich nicht schneidet, und Ausdehnung auf Sternpolyeder.

C. Seidelin, Bevis etc. Tychs. Tidsskr. (2) 6 (1870) p. 22 (erster *L'Huilier*scher Beweis).

J. P. Kirkman and *J. Booth,* Educational times 20 (1874) p. 26.

H. Schubert, Grun. 63 (1879) p. 97. Die Konstantenzahl eines Polyeders und der *Euler*sche Satz (abzählende Geometrie).

R. Hoppe, ibid. p. 100. Ergänzungen des *Euler*schen Satzes von den Polyedern, anschließend an *L'Huilier* und auch in der Beweismethode. Sind h Durchbrechungen, c Durchlöcherungen und g leere Räume, so ist

$$e + f = k + 2 + (h + 2g - 2c).$$

W. Godt, Untersuchungen über Polyeder von mehrfachem Zusammenhang, Programm Lübeck (1881):

$$e - k + f = 2 + (o - p),$$

wo p der Grad des Zusammenhangs der Oberfläche als solcher; also, wenn die begrenzten Polygone alle einfach zusammenhängend sind:

$$e - k + f = 3 - n.$$

Edm. Heß, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung, Leipzig (1883), s. oben.

C. Crone, Zeuthen Tidsskr. (5) 3 (1885) p. 44. On *Euler*'s Sätning on Polyed. Formel von *Godt*; idem: Nyt Tidsskr. 4 (1893); ibid. auch *Ansted.*

C. Reinhardt, Sächsische Berichte (1885): Zur *Möbius*schen Polyedertheorie (nicht elementar).

O. Rausenberger, Die Elementargeometrie (1887), s. Methodik.

F. Röllner, Zeitschrift für das Realschulwesen (1890) p. 133: Über einfach und mehrfach zusammenhängende Polyeder.

C. Reinhardt, Einleitung in die Theorie der Polyeder. Programm Meißen (1890).

M. Raschig, Zum *Euler*schen Satz der Polyedrom. (Festschrift des Gymnasiums Schneeberg (1891)); gute Arbeit, aber nicht elementar (einfaches Polyeder, mehrseitige Ecken etc.).

E. de Jonquières, Comptes rendus 110 (1890) p. 169. Nôte sur le théorème d'*Euler* dans la théorie des polyèdres; auch historische Notizen. ibid. p. 110: Note sur un point fondamental. *Euler*scher Beweis ohne *E.* zu kennen!

J. Perrin, ibid. p. 273: Sur une généralisation du théorème d'*Euler* etc.; vgl. *Cayley* (1868).

E. Bortolotti, Rendiconti di Bologna (1890) p. 132: Alcune osservazioni sulla definizione di connessione. Anschluß an *Jordan,* nicht elementar.

Weill, Nouv. annal. (3) 17 (1898) p. 120 zeigt, daß es auch nicht-*Euler*sche Polyeder gibt, für welche durch Kombination von Singularitäten der Satz gilt, was schon *L'Huilier* mit dürren Worten ausgesprochen hat. Ibid. vorher (3) 8 *Bourlet,* elementar, aber nichts Neues.

Max Brückner, Vielecke und Vielflache (1900); dort auch der Satz mit seinen Erweiterungen und Nr. 56 § 57 Geschichte des *Euler*schen Satzes. Das Werk *Brückners* zeugt von ebensogroßem Fleiße wie Sachkunde über das ganze Gebiet der Polyeder.

J. Trigonometrie.

33. Ebene Trigonometrie (und Polygonometrie).

a. Allgemeines.

Die ebene Trigonometrie, selbständiger Zweig seit *Nasir Eddin*, den *Karatheodory* (1892) französisch übersetzt hat, und die Polygonometrie sind, wenn man von der Vermehrung des Aufgabenmaterials, z. B. durch die Berechnung der Entfernung der merkwürdigen Punkte, durch die Einführung der Winkelhalbierenden, Höhenabschnitte etc. und von ihrer Verwendung zur modernen Dreiecksgeometrie absieht, über *Euler*, *L'Huilier*, *Legendre*, *Cagnoli* nicht wesentlich hinausgekommen.

E. Haentzschel (Programm Berlin, Ostern 1900) bestreitet zwar *Rudio* gegenüber *Euler* das Verdienst, die trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse, d. h. Zahlen aufgefaßt zu haben, doch mit Unrecht. Er ist freilich langsam durchgedrungen; noch in der 7. Auflage des *Lacroix* findet sich der Radius, dagegen ist bei *Terquem* [Manuel de géométrie, 2. Aufl. (1838)] schon die reine Zahl klar und scharf, während z. B. *Natani* noch 1867 im *Hoffmann*schen Wörterbuch den Sinus als Kathete definiert, so daß *Reuschle* in seiner ausgezeichneten Trigonometrie von 1873 es noch für nötig hielt, besonders zu betonen, daß die trigonometrischen Funktionen nicht Linien sondern Zahlen sind. Vgl. dazu *A. v. Braunmühl*, Biblioth. math. *Eneström* (1901) p. 64: Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie, der *Euler* volle Gerechtigkeit widerfahren läßt.

Neben goniometrischen Relationen, Reihenentwicklung und Behandlung gewisser Probleme wie die *Hansen*sche und die *Pothenot*sche Aufgabe, wie die Gleichung:

$$a \sin x + b \cos x = c \text{ etc.},$$

handelt es sich besonders um die Erweiterung der Definitionen über das rechtwinklige Dreieck hinaus oder über den 2. Quadranten und um den allgemeinen Beweis des Additionstheorems. Die Erweiterung geschieht entweder durch das von *Möbius* besonders scharf betonte Prinzip der Zeichen (schon *Cagnoli* nach dem Vorgang der analytischen Geometrie) oder durch das Additionstheorem mit der durch die preußischen Lehrpläne von 1892 gebotenen Variante $\alpha = \beta$. Für

ersteren Modus lenke ich die Aufmerksamkeit auf das, wie es scheint, ganz unbeachtete Lehrbuch der Trigonometrie von *H. Graßmann* (dem Großen) (1865). Für Viereckstrigonometrie haben besondere Verdienste *Bretschneider* und *G. Dostor*. Für die Ausbildung des Aufgabenmaterials nenne ich den bedeutenden in Heiligenstadt vergessenen Synthetiker *Franz Seydewitz*, ferner *John Casey*, *J. Neuberg*, *O. Hermes*, *Lieber* und *v. Lühmann*; großes Material hat auch *Schellbach* seinen Schülern übermittelt.

b. Geschichte.

C. F. Pfleiderer, Geschichte der ersten Einführung der trigonometrischen Linien, Tübingen (1785 und 1790) und Trigonometrie (1802).

F. Wilberg, Die Trigonometrie der Griechen (1838) (Benutzung von *Delambre*). Einige Notizen auch im *Klügel* 5 (*Grunert*).

R. Baltzer, Elemente der Geometrie Bd. 2 (1853).

Gott. Wagener, Geschichte der geometrischen und trigonometrischen Lösungen bis 1852. Progr.

Aubry, *Bourget* (1895); Notes historiques p. 104 etc.

A. v. Braunmühl, Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie Bd. 1 (1900), vgl. auch die *Eneström*sche Bibliotheca mathematica und *A. v. Braunmühl*'s Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie (1897) (Leopold. Carolin. Akademie).

H. Zeuthen, Biblioth. math. *Eneström* (1901) p. 20: Note sur la trigonométrie de l'antiquité; ibid. p. 321: *M. Curtze*, Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter.

c) *Additionstheorem:* Einfachste Ableitung von $\sin(\alpha+\beta)$ für $\alpha+\beta<\pi$ durch *Cauchy* (als Schüler der école polytechnique) mitgeteilt von *Terquem*, Nouv. annal. 3 (1844) p. 376. Man fällt eine Höhe, dann ist das ganze Dreieck gleich der Summe der beiden rechtwinkligen Dreiecke. Die Lösung ist oft reproduziert, z. B.:

Grunert, *Grun.* 21 (1853) p. 237, *Kösters*, *Grun.* 22 p. 232, sowie in Mathesis und *Bourget*; aber sie ist ihrer Art nach gut mittelalterlich und findet sich u. a. bei *A. Cagnoli*, 2. Aufl. (1804) Kap. 4 p. 18; sie steht auch in *Hoffmann*'s Wörterbuch (*Natani*). Sin $(\alpha+\beta)$ durch *Ptolemäos* als Lösung der école polyt. mitgeteilt von *M. E. Midy*, Nouv. annal. 3 (1844); aber schon *Carnot* hat (1801 und 1803) darauf hingewiesen (s. auch *Ptolemäos*).

P. F. Sarrus, *Gerg.* 11 p. 30; $\cos(x-y)$ aus Distanz der Sehne.

Thibault, Nouv. Annal. 2 (1843) p. 309, allgemeiner Beweis.

F. Arndt, *Grun.* 6 p. 95; allgemeiner Beweis durch Erweiterung vom speziellen Fall $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

J. Astrand, *Grun.* 18 p. 479; ähnlich wie *Cauchy*.

C. Spitz, *Grun.* 32 (1859) p. 289, allgemeingültig; bemerkenswert durch Einführung der Funktionen:

$$\frac{1}{2}(1-(-1)^a)(-1)^{\frac{a-1}{2}}=\sigma_a;\quad \frac{1}{2}(1+(-1)^a)\;(-1)^{\frac{a}{2}}=\gamma_a.$$

H. G. Graßmann, Lehrbuch der Trigonometrie, Berlin (1865), p. 26 $\cos(x+y)$ durch Projektion und allgemeingültig.

Ch. Brisse, Nouv. annal. (2) 16 (1877) p. 49; $\cos(\alpha+\beta)$ durch Projektionssatz.

H. Hart, *Messenger* 4 (1875) p. 97. *Ptolemäos.*

Graf *Pfeil*, *Grun.* 58 (1876) p. 319 (*Cauchy*).

H. Lemonnier, Nouv. annal. (2) 10 (1851) p. 26; $\cos(\alpha \mp \beta)$ durch geometrische Sätze gefunden.

A. Gravelaar, Nieuw Archief (5) 187 (1879); De Grondformulen etc.

E. Brand, *Bourget* (1895) p. 170. Geom. Ableitung.

B. Niewenglowski, *Bourget* (1886) p. 8 $\cos(x-y)$ mittels Projektionssatz; weit besser als die Ableitung von *Fajon*, *Bourget* (1878) p. 271.

A. Thiry, Mathesis 10 (1890) p. 54; ibid. p. 112, *B. J. Clasen.*

E. Haentzschel, Programm (58) Berlin (1901) wie *Cauchy.*

A. Moroff, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften (1900) No. 5. Allgemeingültigkeit.

Multiplikation ohne Moivre.

C. F. A. Jacobi in *van Swinden's* Elem. der Gem. (1834) Anhang p. 331 u. 332.

Alf. Di Legge, *Battaglini* 9 (1871) p. 377 $\frac{\sin}{\cos}(A+B+C+D+\ldots)$; vgl. *Vachette*, Nouv. ann. 1 p. 345 oder *J. Bernoulli* 1701.

Villarceau, Comptes rendus t. 82 (1876): durch Differentiation der Rekursionsformel.

F. Arndt, *Grun.* 4 p. 441: $\cos nx : \cos^n x$ und $\sin nx : \sin^n x$, als Funktion von $\operatorname{tg} x$. (*Maclaurin*sche Reihe.)

D. André, Nouv. annal. 2. 10 p. 359; $\sin(n\alpha+z) \cdot \cos(n\alpha+z)$. *Catalan* ibid. (3), 2, p. 529 $\cos mx$ und $\sin mx$ durch $2\sin x$ und $2\cos x$. *Mourgues* (2) 12 p. 408. *Le Besgue* p. 425 (besser). *A. Desboves* (2) 14 p. 385; kurz und elementar; ders., Questions de trigonométrie z. B. $\Sigma \sin(b-c)\cos(b+c) = 0$. $\sin 2b - \sin 2c$ etc.

A. Cayley *Messenger*, 5 (1876) p. 7: On the expression for $1 \mp \sin(2p+1)u$ in terms of $\sin u$.

J. W. L. Glaisher, *Messenger* 4 (1874) p. 137. Kettenbruch für $\operatorname{tg} n\frac{\pi}{4}$, auch $\operatorname{tg} h\frac{a\pi}{4}$, vgl. S. 231.

A. H. Anglin, Educ. times (1885), auch *Grun.* (2) 2 p. 407, vgl. S. 230.

Humbert, Educ. times 60, (1860) p. 62 No. 11 725.

Th. Cotterill, Quarterly journal 7 (1866) p. 259; wichtige Relationen zwischen Sinus und Kosinus von 9 Winkeln, von denen 4 oder 9 unabhängig;

dazu *A. Cayley* (1878): Quart. journ. 15 p. 196, Note.

J. W. L. Glaisher, *Messenger* 8 p. 46; trigonometrische Identität. *Mess.* 10 (1881) p. 26, Relation zwischen 4 beliebigen Winkeln und ihren algebraischen Summen.

Cayley, *Messenger* 5 (1876) p. 164. Wenn $A+B+C+F+G+H=0$. so ist $\sin(A+F)\sin(B+F)\sin(C+F)\cos F \sin F = 0$, dazu Erweiterung durch *R. F. Scott*, *Messenger* 10 (1881) p. 142, welche ibid. 8 p. 155 den Satz bewiesen hatte.

Graphische Demonstration der bei weitem am häufigsten gebrauchten Formel:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

von *E. Harrison*. The mathem. monthly *Runck*, Cambridge America. (1860) p. 220.

J. W. L. Glaisher, Proceed. of the philos. society, Cambridge 3, p. 319 u. 383. Formeln, durch Transformation der elliptischen Funktionen erhalten, werden elementar abgeleitet von *N. Goffart,* Nouv. annal. (3) 3 p. 104. Formeln von *Glaisher,* Congrès de l'association française zu Reims (1880) 17. Aug., verallgemeinert durch *Hermite,* Nouv. annal. (3) 4 p. 57.

Elementare Berechnung des Sinus.

Erklärung für „Sinus" aus dem arabischen Dscheib (Sectio).

Ch. L. Ideler, Zach's Monatliche Korrespond. (1812) Juli; Über die Trigonometrie der Alten. (*Schubert,* Nova acta Petropol. 12.)

Das Wort Sinus richtig erklärt durch den Orientalisten *Munck*, Note von *Terquem* zu *F. Woepke,* Nouv. annal. 13 p. 386 und nicht erst durch *M. Koppe,* Programm des Andreas-Realgymnasiums, Berlin (1893).

E. Lakenmacher, Grun. (2) 9 (1890—91) p. 215. Annähernde Sinuswerte (genau für 7,5°; 12°; 15°; 18°; 22,5°; 30°, 36°, 45°) mittels 3 Formeln von 0—15, 15—30, 30—45. — Für die Beziehungen

$$a - \sin a = d;\ d < \frac{1}{6} a^3;\ \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24};$$

einfacher Beweis von *H. Vincent,* Nouv. annal. 1 (1842) p. 272, *E. Lionnet,* Nouv. annal. 2 p. 216, Festsetzung der Grenzen $\frac{a^3}{6}$ und $\frac{a^3}{7}$. *A. Deladérèere,* p. 494; $d > \frac{1}{10} a^3$ und $d < \frac{1}{7} a^3$; *J. Joffroy,* Nouv. annal. (2) 14 (1874) p. 171; geometrischer Beweis, daß $d < \frac{a^3}{4}$. (Die kleine Lücke im Beweis, daß das Segment < als das doppelte Dreieck, ist leicht auszufüllen.) $d < \frac{a^3}{6}$ von *Bernès*, Mathesis 10 p. 112; $d < \frac{a^3}{4}$, einfach geometrisch von *M. Fouché, Bourget* (1895) p. 54;

$$\vartheta - \sin \vartheta < \operatorname{tg} \vartheta - \vartheta, \text{ wenn } \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

bewiesen mit Hilfe des Satzes, daß die Verbindungslinie der Mitten zweier Tangenten den Kreis nicht schneidet, von *Genese,* Educ. times 82 (1885) No. 7146.

Übrigens wußte schon *Pappus*, daß:

$$a - \sin a < \frac{2a}{\pi} \text{ Satz 15, Buch 5.}$$

Daß der Bogen $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ zwischen sinus und tangens, beweist *Lacroix* ohne *Archimed*ischen Grundsatz, *R. Baltzer,* § 3, Schluß, einfach aus dem Umstand, daß der Sektor zwischen Sinus- und Tangentendreieck liegt.

Die *arabische* Methode für sin 1°: *F. Woepke, Liouville* 19, p. 153, 301. Die Formel von *„Ozanam"* benutzen *P. Mansion* und *H. Brocard,* Mathesis 9 p. 161, 181, 265. *Le Paige* bemerkt ibid. 10 p. 34, daß sie von *Snell*, und *Moritz Cantor,* daß sie sich schon bei *Nicolaus Cusanus* findet:

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

In Reihe entwickelt ist nämlich

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = x - \frac{1}{180} x^5 - \frac{1}{1512} x^7 - \cdots$$

Die Gleichung 3. Grades für $\sin\frac{\varphi}{3} = x$; $-\sin\varphi = 4x^3 - 3x$, z. B. *Dippe*, *Grun.* 7 (1846) p. 109; $\varphi = 18 - 15 = 3$ (*arabisch*).

In *Heis'* bekannter Aufgabensammlung (algebraisch) § 100, No. 11 findet sich eine Gleichung 5. Grades zur Bestimmung eines Zentesimalgrades, die auf $\sin 5\alpha = 16 \sin 5\alpha$ etc. zurückkommt, wenn $5\alpha = 4{,}5^0$ ist.

Berechnung der Tafeln der Logarithmen der Funktionen; *L. B. Francoeur*'s cours complet de mathémat. pur. mitgeteilt im Quarterly journ (1858) p. 222.

(Straßburg) *Finck*, Nouv. annal. 2 (1843) p. 329. Limite de l'erreur des sinus nat.

W. Matzka, *Grun.* 12; Genauigkeit für $a = \sin a = \operatorname{tg} a$.

F. Burnier, Bulletin Soc. Vaudoise des sciences naturelles. Note sur les logarithmes des sinus et tangentes de petits angles (Auszug im *Grun.* 43 (1865) p. 487).

A. Morel, *Bourget* (1879) p. 36; Des erreurs en trigonométrie.

D. Besso, *Besso* periodico 1, 122; Sull' errore nel calculo del seno d'un angolo con tavole.

Ch. Hessel, *Grun.* 48 p. 81; $\cos\frac{180}{n}$ nur rational, wenn $n < 4$; $\cos\frac{360}{2n+1}$, wenn $n < 2$.

c. Lehrbücher (nebst Aufgabensammlungen) und Monographien.

L. N. Carnot, De la corrélation des figures en géométrie (1801), verdunkelt durch die géométrie de position, die ganze Goniometrie an einer einfachen Figur p. 84; Projektionssatz p. 139; desgl. im Raum p. 145; verallgemeinerter Kosinussatz p. 162; *Carnot*scher erweiterter *Menelaos* p. 164; Polyederprojektionssatz p. 169; Kosinussatz p. 170 ($\Sigma a^2 = \Sigma 2ab \cos ab$). Quadrat eines Polygons = der Summe der Quadrate seiner 3 Projektionen auf die 3 Achsen Ebenen.

A. Cagnoli, 2. Aufl. Tr. piana e sferica notabilmente amplificata Bologna (1804), franz. (1808), sehr ausführlich, darin die sogenannten *Gauß*schen, oder *Delambre*schen, oder *Mollweide*schen Gleichungen implicite.

K. D. v. Münchow, Die Grundlehren der Trigonometrie. Bonn (1816). *Gut.*

S. F. Lacroix, (1822) 7. Aufl., *W. v. Brückenbrand*, Lehrbuch der Geometrie etc. 2. Aufl. (1824).

J. A. Grunert, Elemente der ebenen sphäroidischen und sphärischen Trigonometrie; Leipzig (1837) vgl. *Klügel* 5.

O. Terquem, Manuel de géométrie, 2. Aufl. (1838).

J. A. Hind, Elements of plane and spherical trigonometry. 4. Aufl. (1841—1842).

Fr. Pross, (1840) Stuttgart.

A. de Morgan, (1841) London; Tr. and double Algebra (1854).

R. Lobatto, Leerboek der regtl. en spher. Driehoeksmeting (1843).

A. Delisle et Gerono, Eléments de trigonom. rectiligne et sphérique, Paris (1845).

A. Wiegand, Lehrbuch, Halle (1851); viele Aufl.

H. B. Lübsen, (1852); viele Aufl.; 17. Aufl. Leipzig (1900).

J. Dienger, Ebene und sphärische Trigonometrie; sehr ausführlich (1855).

J. Serret, Élém. de Trig. (1853), rasch verbreitet. Sehr gut.

J. Dienger, Die ebene Polygonometrie (1854).

J. Petersen, Ebene Trigonometrie und sphärische Grundformeln. Deutsch von *Fischer-Benzon* (1885).

J. Todhunter, Plane trigonom., London (1859). Viele Aufl., eine deutsche Übersetzung habe ich leider nicht konstatieren können.

Th. Wittstein (1859).

(*C. A. A.*) *Briot et* (*J. C.*) *Bouquet,* Leçons de trigonom., 3. Aufl., Paris (1858) 13 (1897), reichhaltig.

G. B. Bellavitis, El. di geometria, trigon. etc. Padova 1862.

J. Helmes, (1864) auch viele Aufgaben und eine Anzahl historischer Notizen.

H. G. Graßmann, Lehrbuch der Trigonometrie (1865).

C. G. Reuschle, Elemente der Trigonometrie mit ihrer Anwendung in der mathematischen Geographie (1873), sehr reichhaltig.

A. Simon, Die Elemente der ebenen Trigonometrie, Programm, Sprottau (1875) (von *Hoppe* gelobt).

R. Lämmermayer, Programm Linz (1872).

J. Diekmann, Programm Essen (1877). Zurückführung auf die 3 Grundgleichungen, $a = b\cos C + c\cos B$; *Grun.* 63 p. 267, aber schon viel früher *Gerono,* Nouv. ann. 16 (1857) p. 76.

E. Heis (und *Eschweiler*) 3. Aufl. (1888).

F. J. Brockmann, Die goniometrischen Funktionen in ihrer allgemeinen analytischen Bedeutung (1870—71); ders., Lehrbuch 2. Aufl. (1880), 1. Aufl. (1869). Leipzig.

E. Catalan, Manuel de trigonom., viele Aufl. 10. Aufl. Paris (1888).

M. Focke und *M. Kraß,* Lehrbuch der Trigonometrie, Münster (1873), viele Auflagen.

E. Glinzer, (1883) Hamburg.

E. Hammer, Lehrbuch der Trigonometrie, Stuttgart (1885), gut.

Hub. Müller, (1886) Metz (mit Aufgabensammlung; Prinzip der Ausnahmslosigkeit).

A. Wernicke, Goniometrie etc., Braunschweig (1888), sehr breit.

W. Mantel, Traité de trigon. analytique. (Arnheim) (1877).

K. Schwering, Freiburg (1893).

A. de Morgan, Trigonometry (1849), London, neue Bearbeitung (1899).

F. F. Bohnert, Ebene und sphärische Trigonometrie, Leipzig (1900).

A. Faifofer (italienisch) 12. Aufl. Venedig (1900).

Für Fortbildungsschulen etc.: *S. Pincherle,* Geometria metrica e trigonometria, Milano, 5. ed. (1900). *H. Diesener,* Halle, 2. Aufl. (1895). *Carl Gusserow* und *L. Levy,* Berlin (1891).

Jentzen, Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch an mittleren technischen Lehranstalten. Dresden (1897).

Im übrigen vergleiche auch die allgemeinen Lehrbücher der Elementarmathematik und das *Lampe*'sche Jahrbuch.

d. Trigonometrische Reihen und Verwandtes.

Sinus und Kosinus x nach Potenzen von x, *Gergonne*, Anm. 3 (1813) p. 344 (sehr elementar bis auf Konstantenbestimmung und Konvergenz), desgl. x nach tg x (*Leibniz-Gregory*sche Reihe). id. Ann. 1 p. 16. Die unendlichen Produkte (*Euler*, Introductio in anal.).

O. Schlömilch, Grun. 5 p. 326; sinus und cosinus von x nach x. *Cauchy,* Cours d'analyse, durch $f(x+y)$. *Graßmann* (1865), Lehrbuch desgl. (elementar und streng). *O. Biermann,* desgl. Elemente der höheren Mathematik (1895). *K. Meusburger,* Wiener Monatshefte 6 (1895) p. 256 (wie *Biermann*) und andere, z. B. *Mehler* (*Schellbach*), *van Swinden-Jacoby,* Elnm. der Geom. p 583 ff.

V. Jamet, Mathesis 2 p. 52, arctg x (elementar, aber das Kommutationsgesetz vorausgesetzt).

E. Haentzschel, Programm 58, Berlin (1901) (elementar, aber nicht streng), $\sin x$, $\cos x$ nach x.

L. Olivier, Crelle 1 (1826) p. 16; $\cos^n x$ durch $\cos kx$ (nicht elementar).

E. J. Scholtz, Crelle 3 (1828) p. 70; die Reihe von *Stainville,* für $(\operatorname{arc} x)^2$ (nicht elementar).

H. F. Scherk (Halle), *Crelle* 11; $\operatorname{arc}^n x$ nach steigenden Potenzen von $\sin x$ (nicht elementar, ebenso die Dissertation von *E. E. Kummer*).

A. Rodrigues, Liouville (1843) p. 217, Entwickelung der trigonometrischen Funktionen in Produkte von linearen Faktoren z. B.:

$$\sin \pi y = \pi y (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right) \cdot \left(1 - \Theta\left[1 - \cos^{2n+1} \frac{y\pi}{2n+1}\right]\right); \quad \Theta < 1.$$

Eine elementare Ableitung der *Euler*schen unendlichen Produkte deutet *Fz. Meyer*, Sammlung *Schubert* 10, § 24 p. 393 an (aus der Periodizität).

J. L. A. Lecointe (in den Annalen steht *L. A. Le Cointe*), Nouv. annal. 1 (1842) p. 508, rein elementargeometrisch:

Die *Euler*sche Reihe:

$$\left(\frac{\pi}{2n+1} = \alpha\right) \quad \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(n+1)};$$

ders. auch: Nouv. annal. 3 (1844) p. 518 $\Sigma \sin k\alpha$.

E. Catalan weist p. 570 auf die Unbestimmtheit der unendlichen trigonometrischen Reihen für $\Sigma \sin k\alpha$ hin (Note von *Terquem*). *O. Schlömilch, Grun* 9 (1847) p. 1: Reihen von der Form

$$A_0 \cos^n x \cos nx + \cdots + A_{n-1} \cos x \cos x \text{ und ebenso für } \sin x$$

statt $\cos nx$ durch einfache Potenzen des Kosinus oder Sinus.

H. Rumpen, Ch. Laisant, Nouv. annal. (2) 11 p. 232; Summe von

$$(-1)^k \frac{1}{3^k} \cos^3 3^k \varphi,$$

aber *E. A. Catalan.* ibid. (2) 9 p. 199 allgemeinere Reihe.

O. Schlömilch, Elegante Summation von:

$$\sum_1^n \sin kx \text{ und } \cos kx \quad (\textit{Lecointe})$$

ders., *Schlöm.* 32 p. 68, arcsin x: Konvergenz des Restes vgl. id. ibid. 1 p. 48 und 1 p. 181. *E. Beltrami.*

$$\sum \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{m^2} = \frac{3}{4} \pi:$$

elementar bewiesen von *Ant. Roiti*, Giorn. di matem. (1867) p. 189, 254. *Escher, Grun.* 44 (1865) p. 374. $\sum \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2k}}{2k}$.

J. W. L. Glaisher, Quarterly journ. 15 p. 151: Es sei

$$\varphi(ix) = \left(1+\frac{ix}{a}\right)\left(1+\frac{ix}{b}\right)\left(1+\frac{ix}{c}\right)\cdots = A + iB, \text{ so ist:}$$

$$\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{b} + \cdots = \operatorname{tg}^{-1}\frac{B}{A}.$$

(tg^{-1} ist die *englische* Bezeichnung für arc tg x.)

Verdon, Messenger 7 p. 122 (1878); Expansion of products of cosines and sines; *Cayley*, p. 124; Trigonometrische Identität (*Glaisher*, p. 191, *Vieta-Euler*sche Formel). *Glaisher*, Cambridge Philos. society proceed. (1889) vol. 3 p. 319, vgl. S. 226; trigonometrisches System, ursprünglich aus elliptischen Funktionen, Ausführung im *Messenger* 10 (1881) p. 73, 92. A system of trigonom. form. (*L'Huilier*sche Formel für den Eckensinus etc.) — *A. H. Anglin, Grun.* (2) 2 (1885) p. 407.

$$\sum \operatorname{arc\,tg} a_k = \operatorname{arc\,tg} \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \cdots}{1 - c_2 + c_4 - \cdots},$$

wo die a die Wurzel der Gleichung

$$x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots = 0$$

(elementar ohne *Moivre*), vgl. aber *van Swinden-Jacobi* p. 331.

Meurice, Mathesis 13 (1893) p. 19 $\sum_0^{n-1} \sin(a + kh)$, ebenso Σ cos durch polygonalen Streckenzug im Kreis.

De Presle, Bull. Soc. math. Fr. 16, p. 143 (1888).

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum \frac{z}{n\pi(z - n\pi)}$$

mittels des *Mittag-Leffler*schen funktionentheoretischen Satzes.

L. Seidel, Crelle 73 p. 273; *Vieta-Euler*sche Formel, neu nur die volle Vieldeutigkeit des Bogens. *S. Réalis*, Nouv. annal. (2) 9 p. 12; ohne Konvergenzbeweis. (*Rudio, Lerch.*) Siehe auch *Franz Meyer*, Sammlung *Schubert* 10 p. 5.

Hierhin gehört auch *Boutin, Bourget* (1886) p. 227, Auflösung von:

$$C = \cos x + \cos 3x + \cdots \cos(2^n - 1)x = 0 \text{ etc.},$$

sowie auch viele von den zahlreichen Aufgaben *Neuberg*'s über Systeme trigonom. Gleichungen in den Educat. times von 1865—71 und *Joachimsthal*, Nouv. annal. 12 p. 323. Formel betreffend die Funktion tang.

$$1 - \frac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} mx \operatorname{tg}(m-1)x}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} - \frac{\operatorname{tg} - 0 \operatorname{tg} - 1 \operatorname{tg} - 2}{\operatorname{tg} 1 \operatorname{tg} 2 \operatorname{tg} 3} \text{ etc.} =$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{tg} mx \operatorname{tg}(m-1)x \operatorname{tg}(m-2)x \cdots \operatorname{tg} x, \text{ wenn}$$

$$m = 2n, \text{ aber } = 0, \text{ wenn } m = 2n + 1.$$

J. Wolstenholme, Quarterly journ. 10 (1869) p. 356;

$$a \cos\beta \cos\gamma + b \sin\beta \sin\gamma = c;\ a \cos\gamma \cos\alpha + \cdots = c \text{ etc.},$$

nur möglich, wenn $bc + ca + ab = 0$, dann ziehen zwei die dritte nach sich. Das System ist { mit

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

H. Dellac, Bourget 1 (1877) p. 40. Problème de *Myosotis*, dabei geometrische Summation von

$$1 + m\cos\alpha + m^2\cos 2\alpha + \cdots = \frac{1 - m\cos\alpha}{1 + m^2 - 2m\cos\alpha} \text{ und}$$

$$m\sin\alpha + m^2\sin 2\alpha + \cdots = \frac{m\sin\alpha}{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}.$$

Ibid. *Catalan:*

$$4m = \left(2^m \sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\cdots\frac{\sin(m-1)\pi}{2m}\right)^2;$$

T. R. Terry, Educat. tim. 60 (1894), 11 879; elementarer Beweis, daß:

$$\frac{1}{4}x = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\cos 5x \cdots \text{ und}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} h^{-1}(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots$$

auch No. 11 725 gehört hierher (*Humbert*). Vieles, was in den Journalen als neu auftritt, findet sich schon in dem sehr reichhaltigen Anhang *Jacobi*'s zu *van Swinden*'s 8. u. 9. Buche p. 323—345.

Kettenbruch für $\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4}$:

Glaisher, Messenger (1874) p. 137; A continued fraction for für tg nx, aber schon 1833 *Vorsselman de Heer*, Specimen inaugurale de fractionibus continuis. Utrecht; auch *Euler* Mém. de l'Acad de Pétersb. t. 6 (1813) p. 8 und *Gauß*, Quotient zweier hypergeometrischer Reihen; sehr einfach abgeleitet (elementar bis auf den Begriff der Ableitung) von *Schlömilch, Schlöm.* 16 (1871) p. 259.

Die Berechnung des arcus aus den trigonometrischen Funktionen suche bei π (No. 3); doch sei erwähnt:

Die *Maskelyne*sche Regel elementar abgeleitet von *Hammer* (l. c.) für kleine x:

$$\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}, \text{ also } \log x = \log\sin x - \frac{1}{3}\log\cos x.$$

K. Cwojdzinski, Grun. (2) 17 p. 1—28; trigonometrische Studien.

e. Sinus- und Kosinussatz. (Tangentensatz.)

Hübsche Ableitung des Sinussatzes aus dem Kosinussatz: *Gergonne, Gerg.* 3 p. 348, auch für das sphärische Dreieck. Auf die alte Methode, die gegebenen Stücke durch R und die Winkel mittels Sinussatzes auszudrücken, macht *Reidt* in *Hoffmann* 7 aufmerksam Der natürlichste Beweis vom Sinus- und Kosinussatz (planimetrisch und sphärisch zugleich) schließt sich wohl an den ersten Kongruenzfall an, vgl. *Max Simon* in *Baumeister*'s Handbuch der Erziehung etc. (es scheint, daß *Graßmann*, vgl. Lehrbuch p. 35, im Unterricht ebenfalls vom 1. Kongruenzsatz ausging).

Vom Radius des Umkreises (wie *Ptolemäos*) geht *Baltzer* aus, oder von dem Verhältnis $abc:2\triangle$. Der Kosinussatz ist keineswegs zuerst von *Carnot* (Corrélation und Géométrie de position) formuliert, sondern findet sich, wie *Eneström* hervorgehoben hat, schon bei *Nasr Eddin (Thusi)* in dem ersten Werk, das die Trigonometrie selbständig behandelt, der Sinussatz dagegen wohl zuerst bei *Regiomontan* (*Geber?*)

Der allgemeine Projektionssatz zuerst handschriftlich bei *L'Huilier* in der Fortsetzung seiner Polygonometrie noch vor *Carnot* (1801).

Vom Kosinus als Grundfunktion geht *Graßmann* aus, und dies ist, wenn man nicht die Trigonometrie an die Ähnlichkeit anknüpft, von rein geometrischem Standpunkt aus das Natürlichste.

C. A. Laisant, Société de France Bulletin 15 (1887) p. 198; Projektionssatz: wenn:

$$A_1 \cos x + \cdots + A_n \cos nx = 0 = A_1 \cos(x+\alpha) + \cdots + A_n \cos(nx+\alpha),$$

so ist für beliebiges ϑ:

$$A_1 \cos(x+\vartheta) + \cdots + A_n \cos(nx+\vartheta) = 0, \text{ falls } \alpha \neq k\pi.$$

Cayley, Johns Hopkins university circular No. 17 (1882) p. 241; Note on the formulae of trigonometry; führt man in $a = c\cos B + b\cos C$ etc. ein:

$$\cos A + i\sin A = x : w \text{ etc.},$$

so erhält man ein symmetrisches algebraisches System.

Tangentensatz.

Nirgends findet sich ausgesprochen, daß der Tangentensatz eine rein goniometrische Formel ist; als Dreieckssatz will ihn *Brockmann*, die separierte Tangentenformel, *Hoffmann* 2 p. 421 durch $\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin A}{c - b\cos A}$ ersetzen (besser $\cot\beta$!) der Kontrolle wegen; *Reidt* ist dagegen: *Hoffm.* 3; *Hoüel, Bourget* (1878), der sich gegen Einführung von Hilfswinkeln und gegen die ausschließliche Benutzung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen ausspricht, dafür. Wie *Fink* und *Regiomontan* beweisen ihn *Rud. Wolf, Grun.* 13 (1850) p. 440; *Vignal,* Nouv. annal. 3 (1844) p. 456. Wie *Ozanam* (table des sinus etc. p. 53) *E. Gelin, Bourget* (1896). Eigenartig geometrisch: *E. M. Langley, Bourget* (1896) p. 3 (*Simson*sche Gerade), *E. Brand, Bourget* (1895) p. 153, ohne Sinussatz.

f. Anwendungen auf besondere Aufgaben.

Die Aufgabe $a\sin x + b\cos x = c$; *Servois, Gerg.* 2 p. 84 (*Goudin,* Paris 1808); *Terquem,* Nouv. annal. 6 p. 205; *Friedrich Meyer, Hoffm.* 18, *F. J. Vaes, Bourg.* (1877) p. 109; *Droz-Farny, Bourg.* (1895) p. 207.

Lauvernay, Bourg. (1896) p. 5; Zusatz mit Konstruktion aus der analytischen Geometrie von *de Longchamps,* p. 59; Konstruktion von *E. Lemoine* und geometrographische Untersuchung, die von *Droz* einfachste p. 84; desgl. von *Bernès.* — *F. J. Vaes,* Goniometrische Studien (Gorinchen) (1896) behandelt:

$$a \operatorname{tg} x + b \cot x = c.$$

*Pothenot*sche Aufgabe: *Willebrod Snellius* in *Eratosthenes Batavus* Lugdun. (1617); Monographie: Die *Pothenot*sche Aufgabe in praktischer Beziehung dargestellt von *Chr. L. Gerling,* Marburg (1840) s. u.; *Gottfr. Wagener,* Über das *Pothenot*sche Problem, Dissertation, Göttingen (1852). Lösungen: *van Swinden,* Elemente der Geometrie, übersetzt von *Jacobi* (1834) p. 316.

Gauß (*Lambert, Delambre*), *Schumacher,* Astronom. Nachrichten 1, No. 6.

Bretschneider, Grun. 2 p. 432; Lösung mittels der Formel *Grun.* 2 p. 225.

Schlömilch, Schlöm. 1 p. 121 (reine quadratische Gleichung); idem 9 (1864) p. 433; *Pothenot* als algebraisches Problem.

Bauernfeind, Ein Apparat zu mechanischer Lösung der *Pothenot*schen, *Hansen*schen und anderer bemerkenswerter geodätischer Aufgaben (Einschneidezirkel), *Grun.* 54 (1872) p. 81. — *D. Fellini,* Torino atti 32 (1897) p. 320. *V. Láska* Prager Ber. 1895.

Die *Hansen*sche Aufgabe ist von *Hansen,* Astronomische Nachrichten No. 419 p. 168, *Gerling,* ibid. No. 62 p. 233, *Th. Clausen,* ibid. 18 (1841); aber praktisch geometrisch schon 1838, *Proß,* Lehrbuch der praktischen Geometrie p. 198 und weit früher schon von *van Swinden* (p. 321, übersetzt von *C. F. A. Jacobi*), auch *Reuschle* (1873). *Alhazen*'s Problem, Literatur bei *Baker,* American journ. 4 p. 327 (verallgemeinert auf die Kugel).

Vom Stande der Feldmessung aus:

Winkler v. Brückenbrand, systematische Abhandlung über die *Pothenot*sche Aufgabe, Wien (1843).

Gauß, Gesammelte Werke, Band 8 (1900); p. 307—334 beweisen, wie sehr diese Aufgabe ihn beschäftigt hat. Ihn interessierte die Untersuchung über die Bedingungen der physischen Möglichkeit, und dann die Anwendung der *komplexen Zahlen.* Auf die Schrift *Gerling*'s bezieht sich der Brief vom 24. Oktober 1840 und der vom 14. Januar 1842.

g. Dreiecksberechnung (auch Vierecke etc.).

R = Radius des Umkreises, r = Inkreis, r_a = Ankreis, h_a = Höhe, w_a = Winkelhalbierende, $2p$ = Umfang, H = Höhen(schnitt)punkt etc.

Mathieu (1807) $\Delta^2 = r r_a r_b r_c$; *L'Huilier* (1809) dito und $r = 4R \sin \frac{A}{2} \cdots$

P. Tédenat, Gergonne 6 p. 129. *Durrande* p. 178. Die beiden bekannten Gleichungen 3. Grades: R durch die 3 Abstände von den Seiten, r durch die von den Ecken (vgl. *E. Lampe,* Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen (1877)]. *Guénau d'Aumont, Gerg.* 12 p. 269, *Gerg.* 13 p. 314; Δ, $\operatorname{tg} \frac{xy}{2} = \sqrt{\frac{(p-A)(p-C)}{(p-B)(p-D)}}$ fürs Kreisviereck (*Lexell*). Auch sphärisch (x und y sind die Diagonalen).

J. Steiner, Gerg. 12 p. 85; Relationen zwischen den Berührungsradien für Dreiecke und Tetraeder.

Zusatz durch *Anonymus* p. 211.

A. Möbius, Crelle (3) 5; *Vielecke* im Kreise (Radius und Fläche als Funktionen der Seiten, Bestimmung des Grades der bestimmendcn Gleichung).

Steiner, Crelle 3 p. 209; im rechtwinkligen Dreieck ist:

$$r_c = r_a + r_b + r \text{ und umgekehrt } (\textit{Pythagoras } 1,\ 2,\ 3)\ [r r_3 = r_1 r_2].$$

Die Formel $\cot\frac{A}{2} + \cdots = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ bei *Fr. Proß*, s. Lehrbücher der Trigonometrie, auch bei *Jacobi-van Swinden* p. 331.

L. A. Le Cointe, Nouv. annal. 1 p. 508; Polygone Trigonometrie.

Fr. Strehlke, Grun. 2 (1842) p. 324; Viereckfläche F:

$$F^2 = (p-a)\cdots(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right),$$

und sphärisch.

C. A. Bretschneider, Grun. 2 (1842) p. 225; Untersuchungen der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Vierecks; darin allgemeiner *Ptolemäos*. Idem: trigonometrische Relationen zwischen den Seiten und Winkeln beliebiger ebener und sphärischer Dreiecke:

$$a^2 c_1^2 + a_1^2 c^2 - 2 a a_1 c c_1 \cos(B \pm B_1) = a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 - 2 a a_1 b b_1 \cos(C \pm C_1);$$

analog sphärisch.

O. Terquem, Nouv. annal. 2 (1843) p. 544 nach *Euler*, aber auch Neueres; z. B. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \cdots = \frac{1}{h_a} + \cdots$; Schwerpunkt.

W. Wallace, Cambridge 2 (1841) p. 35: Expressions of the area.

O. Terquem, Inhalt des Dreiecks und Kreisvierecks unmittelbar aus den Nullwerten, Nouv. annal. 4 p. 219.

Th. Anger, Schumacher's Astronomische Nachrichten und *Grun.* 5 (1844) p. 78.

$$\cos^3\alpha - \left(1 + \frac{r}{R}\right)\cos^2\alpha + r^2\,\frac{2Rr + R\varrho}{2R^2}\cos\alpha = \frac{\varrho}{R},$$

wo ϱ Radius des in das H-Dreieck (Höhenfußpunkt-) eingeschriebenen Kreises.

F. Vallès, Gerg. 21 p. 72; Gleichung 3. Grades, eben und sphärisch für r und R durch die 3 Seiten.

J. Mention, Nouv. annal. 9, sehr einfacher geometrischer Beweis, daß

$$\Sigma r_i = r + 4R,$$

ebenso $r + R =$ algebraische Summe der Abstände des Umkreiszentrums von den Seiten, vgl. *Möllmann, Grun.* 17 (1852) p. 373 und *Jacobi* l. c.

Frz. Unferdinger, Grun. 27 (1856): Zur Lehre vom Dreieck, *Grun.* 29 (1857):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \cdots \text{ etc.,} \quad \Delta = \sqrt{} \text{ etc.}$$

D. C. L. Lehmus, Crelle 40 p. 183:

$$R = n\Sigma r_i, \text{ wo } n = 8(1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \text{ etc.}$$

Baur, *Schlöm.* 6 (1861) p. 221: Sehnenviereck in der Ebene und auf der Kugel; Inhalt des sphärischen Vierecks (aber nicht sehr elegant).

Steiner, $c^2 + \overline{CH}^2 = 4R^2$ (Dreispitzige Hypozykloide).

J. Bond, Quarterly journ. 5 p. 166; geometrische Ableitung von

$$\operatorname{tg}\alpha + t\beta + t\gamma = t\alpha t\beta t\gamma, \quad OD + OE + OF = R + r;$$

erweitert auf $\operatorname{tg} KA + \cdots$ von

E. Gelin, Nouv. corresp. 3 (1876), dort

$$\sin 2kA + \cdots = 4 \sin kA \sin kB \sin kC.$$

L. Geoffroy, 1, 2, 3, einzige Lösungen von $x + y + z = xyz$ in ganzen Zahlen.

E. Lemoine, Nouv. annal. (2) 9 (1870) p. 311:

$$JH^2 = 4R^2 + 2r^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right), \quad HO^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2);$$

$$2R = \frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}},$$

wo l Winkelhalbierende, m zugehörige Mediane, h Höhe.

F. Reidt, Aufgaben (1872). Maximumsaufgaben; Bedingungen, welche Rechtwinkligkeit nach sich ziehen, z. B. p zu r_a, r_b, r_c ganze Zahlen; wenn

$$\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}, \text{ so ist } C = 90;$$

dito, wenn $\cos C = \sin A - \cos B$. Dort auch Winkelhalbierende bis zum Umkreis als Bestimmungsstücke, dito Höhen;

A. Desboves, Nouv. annal. (2) 14 p. 508; Formeln über die Radien der Kreise, welche den Umkreis von innen und 2 Schenkel berühren: $x = \frac{4Rr}{r_b + r_c}$. Nouv. corresp. 1 (1874) p. 183

$$\cot ADC + \cot BEF + \cot CEF = 0,$$

wenn O ein beliebiger Punkt, OD Lot auf a etc,

P. J. Vervaet, Časopis 5 (1876); eine ganze Reihe eleganter Relationen zwischen Seiten, Winkeln, Höhen etc.

Norb. v. Lorenz, Grun. 63 (1879) p. 378; Summe der Mittelsenkrechten $\Sigma p_i = R + r$ (*Tédénat*); Winkelhalbierende bis zum Schnitt $q: q_1 q_2 q_3 = 4Rr^2$; $r = f(q_1 q_2 q_3)$, für $\frac{1}{r}$ als Funktion von $\frac{1}{q}$ dieselbe Gleichung 3. Grades, welche R durch die p gibt. Produkte von Höhenabschnitten als Bestimmungsstücke, Fortsetzung: *Grun.* 64 p. 253.

James Booth, (1877) 1. Jan. Orthocentre für H, vgl. *Bourget* (1879):

$$4R + r = \Sigma r_a; \quad \sum \frac{1}{r^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2} \quad (\textit{Duran Loriga}).$$

$\Sigma q = R + r$, wo q die Abstände des Zentrums des Umkreises von den Seiten (*Tédénat*). Die Summe der Inversen der 6 eingeschriebenen Quadratseiten (innerhalb und außerhalb) $= \frac{2}{r}$; sehr hübsche Ableitung der *Euler*schen Relationen für die Zentrale; Höhenfußpunkt Dreieck E, so ist $E : \Delta = \varrho : R$, wo ϱ die alte Bedeutung; $\Sigma a^2 = 12R^2 - 4\Sigma q^2$.

C. G. Reuschle, Schlöm. 11 (1866) p. 490; Dreiecke, deren *Euler*sche Gerade parallel einer Seite; zu ihnen gehört das Dreieck $\operatorname{tg}\beta = 1$, $\operatorname{tg}\gamma = 2$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

G. Loria, Bourget 5 (1881) p. 104: Dreieck der Winkelhalbierenden auf dem Umkreise, Kontaktdreiecke, Fußpunktendreiecke etc.

J. Main, Mathemat. Magazine (*Erie*) (1883); 46 Ausdrücke für den Inhalt Δ, welche

Ed. Lucas, Mathesis 3 p. 167, auf Gruppen mit Hilfe seines Prinzips der Zeichen verteilt zu 1, 2, 3, 4, 6 und 12 Formeln.

Marcus Baker, Annals of mathem. 1 (1884—85) p. 134, 2 p. 12, ohne Permutation 110, mit Perm. 288 (Mediane und Winkelhalbierende), Formeln für Δ.

Moret-Blanc, Nouv. annal. (1884) p. 494. Die Lote von A auf AB und AC treffen Umkreis in D und E, so ist $ADBE$ oder $ADCE$ flächengleich dem Dreieck.

E. Candido, Nouv. annal. (1899) p. 170; Verallgemeinerung des Satzes (Isogonalität) und Beweis des Satzes über die *Simson*sche Gerade (s d.) von *Goffart,* Nouv. annal. (1884) p. 397.

E. Gelin, Bourget (1888) p. 92, 104, Relations trigonom. entre les trois angles du triangle, 106 Formeln.

Weill, Das Dreieck 6, 5, 4, in dem $A = 2B$, ist das einzige, in dem 2 Winkel in ganzzahligem Verhältnis und die Seiten 3 aufeinander folgende Zahlen. Lösung von *Cesàro,* Mathesis (1889) p. 142; das Dreieck, dessen Seiten arithmetische Reihe: *A. Libicky, Časopis* 27 (1898) p. 141.

F. Ferrari, Periodico di matemat. 8 (1893) p. 67 bestimmt, Sätze von *Thiry* verallgemeinernd, Distanzen der Punkte der Ebene von den Ecken eines Dreiecks und unter sich, wenn die Verhältnisse der durch die Ecktransversalen bestimmten Abschnitte gegeben sind.

E. Candido, Nouv. annal. (3) 18 (1899) p. 31, die Sätze von *Ferrari.*

Zu erwähnen sind die zahlreichen Distanzbestimmungen merkwürdiger Punkte und die Berechnung von Dreiecken im Dreieck, wie z. B. das der Berührungspunkte des Inkreises $J:\Delta = r:2R$ etc. (siehe auch Dreieck, Viereck, *Feuerbach* etc.).

Die Bedeutung der Verbindung $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 \pm c^2)$ ist von *Juan J. Duran Loriga* hervorgehoben als totale und partiale Dreieckspotenz; vgl. aber *v. Lorenz, Grun.* 63 p. 294, und *Grun.* 61 p. 447.

h. Trigonometrische Übertragungsprinzipien und Verschiedenes.

Trigonometrische Übertragungsprinzipien etc.

G. Dostor, Nouv. annal. (2) 19 p. 362, verallgemeinerte trigonometrische Formeln, in denen die Dreieckswinkel α, β, γ ersetzt werden durch $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ und dito durch $\pi - 2\alpha$ etc.

E. Lemoine, Transformation continue in C:

$$A^1 = -A,\ B^1 = -B,\ C^1 = \pi - C$$

Bull. Soc. math. Fr. 19, p. 136, u. Assoc. Franc. Marseille p. 118. (1891) 16. Nov. *Bourget* (1892) p. 62. Jede Relation $F(ABC) = 0$ bleibt richtig, falls $A^1 + B^1 + C^1 = \pi$(?): Mathesis (2) 2 p. 58 etc.; aber schon früher *Ed. Lucas,* Nouv. corresp. (1876) p. 384, (1877) p. 1: Sur l'emploi dans la géométrie d'un nouveau principe des signes. *Lemoine,* Edinb. proceed. 13 (1895) p. 112, 129. Vgl. aber auch *Vieta,* Opera p. 421, dessen sphärisches Nebendreieck hierher gehört.

R. Beez, Schlöm. 7 (1862) p. 129. Dualismus in den metrischen Relationen eines vollständigen Vierecks und Vierseits auf der Kugel und in der Ebene.

G. de Longchamps, Bourget (1891): Triangles caractéristiques, wenn zwischen den Seiten die Gleichung besteht:

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0, \text{ wo } \alpha, \beta, \gamma \text{ Konstanten.}$$

J. Wasteels: Mathesis (2) 3 (1893) p. 89. Dreieck a, b, c, Dreieck $a^1 = b + c$ etc.;

$$\text{z. B. } \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A^1+B^1)}{\sin\frac{1}{2}(B^1-A^1)}.$$

Verschiedenes.

P. Lenthéric, Gerg. 18 p. 83; Quadrant geom. in 3 Bogen, deren Kosinus wie $a : b : c$ so ist

$$\cos x = \frac{ar}{2R} \text{ etc.,}$$

wo R Umkreis zu abc (*Roche, St. Laurent*).

Moutier (*G. Ritt*), Nouv. annal. 6 (1846) p. 366. Wenn $\operatorname{tg} a = i$, so ist $\operatorname{tg}(a + b) = i$ (außer wenn $\operatorname{tg} b = -i$). Die Frage auf p. 271.

J. Houbigant, Nouv. annal. 4 (1845) p. 1; hübscher Satz über Sekanten.

A. Möbius, Crelle 24 (1842); Entwicklung trigonometrischer Formeln durch Doppelschnittverhältnisse.

H. Hart, Messenger 4 (1875) p. 97; Notes on trigonom. formulae (*Ptolemäos*). *Fajon*, *Bourget* (1878) p. 271. *R. Tucker, Messenger* 14 (1884) p. 114; Konstruktion eines Kubus n^3.

Wenn H Mitte von EG ($EG \perp DF$), dann ist $\operatorname{tg} CDH = \operatorname{tg}^3 \alpha = n^3$, vgl. auch die analytische Geometrie der Ebene von *Niewenglowski*. (Fig. 27.)

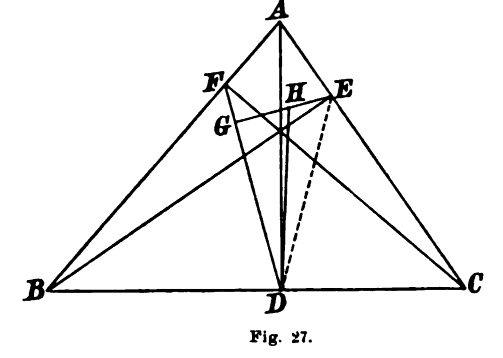
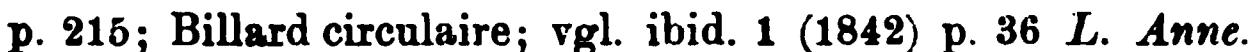


Fig. 27.

Ch. A. Laisant, Nouv. annal. (3) 11 p. 209. Constructions et formules relatifs au triangle. (Äquipollenzen.)

Auric, Nouv. annal. (3) 13 (1894) p. 215; Billard circulaire; vgl. ibid. 1 (1842) p. 36 *L. Anne*.



E. Prouhet, Liouville (2) 1 (1856) p. 215; Jeder Bogen, dessen Tangente kommensurabel mit dem Radius, ist abgesehen von $\frac{\pi}{4}$ inkommensurabel mit dem Umfang; cf. *Weierstraß*, zu *Lindemann*'s Beweis der Transzendenz von π.

A. Cayley, Messenger 7 (1874) p. 124; trigonometrische Identität

$$\cos(b-a)\cos(b+c+d) + \cdots$$

Ch. Hessel, Grun. 48 (1868) p. 81 (s. auch reguläre Polygone), Beweis, daß $\cos\frac{2\pi}{n}$ nur für $n = 1, 2, 3, 4, 6$ rational, vereinfachter Beweis von *A. Winkler*, Wiener Berichte 59 (1869); elementar. — *G. Marqfroy*, Nouv. ann. 10 (1851) p. 142: Wenn

$$\sin^3\Theta = \sin(\alpha - \Theta)\sin(\beta - \Theta)\sin(\gamma - \Theta) \text{ und } \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

so ist

$$\cot\Theta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma.$$

Rechnung ist umständlich, aber diese Eigenschaft des *Brocard*schen Winkels ist hier *vor Brocard*, jedoch nach *H. Hoffmann* (1847) abgeleitet.

Caecilie Wendt, Wiener Monatshefte (1899) p. 97, Vereinf. der Beweise von *Hessel* und *Winkler.*

Eine elementare Ableitung der Dreiecksformeln ($b < a$)

$$\beta = \frac{b}{a} \sin\gamma + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\sin 2\gamma + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\sin 3\gamma + \cdots$$

$$\operatorname{tg} c = a - \frac{b}{a}\cos\gamma - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2\gamma - \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\cos 3\gamma - \cdots$$

bei *F. G. Mehler,* Hauptsätze der Elementarmathematik (1894) § 192.

i. Erweiterungen der Trigonometrie.

Grunert, Sphäroidale Trigonometrie (Lehrbücher und *Klügel* 5) und *Puissant,* Paris (1830), aber schon früher *Euler* (1753).

A. M. Legendre, Mémoire de l'institut (1806); analyse des triangles sur la surface d'un sphéroide und *U. Dini,* Annali della università toscana 40 (1869—1872).

J. Booth, Cambridge and Dublin 8 (1853) p. 63; Parabolische Trigonometrie, der in *Brendel* (1751) einen Vorgänger hatte.

R. Malagoli und *E. Nannei, Battaglini* 27 (1899) p. 60. Elliptische Trigonometrie.

Hyperbolische Trigonometrie siehe nicht-*euklid*ische Geometrie.

J. G. A. Biehringer, Schlöm. 23, 86. Schiefwinklige trigonometrische Funktionen; selbständiges Buch [*Beck* (1877) Nördlingen], wenig Anklang.

(Crefeld) *Beißell, Grun.* 31 (1858) p. 297; Eine Erweiterung des Kosinus und Sinus aus den Reihen.

Die Anwendung zur trigonometrischen Lösung von Gleichungen 2., 3., 4. Grades gehört in die Algebra. Historisches bei

J. Helmes, 2. Aufl. (1881), neuer: *M. Bloume,* Journ. de *Vuibert* (1893) 15. Juli:

$$x^2 + px + q = 0;\; q > 0,\; x = \sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\; \sin\alpha = \frac{2\sqrt{q}}{-p};$$

$$q < 0,\; x = \sqrt{-q}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\; \text{ wo } \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{-q}}{p}.$$

A. Florow, Konstruktion der Wurzeln trigonometrischer Gleichungen mit Zirkel und Lineal:

Spaczinski's Bote 251 (1897) Rußland:

$$\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin(w-x)} = c \text{ und 2 andere.}$$

A. Pellet, Assoc. franç. (1889) Sess. 18 p. 16. Sur la résolut. trigon. de certaines équat. (exemplifiziert an der Gleichung 3. Grades).

Aufgabensammlungen.

Franz Seydewitz, nebst Auflösungen (1839) Heiligenstein.

A. Wiegand, Sammlung trigonometrischer Aufgaben. Halle (1852) (eben).

F. Reidt, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie, Leipzig (1872), besonders auch Bedingungen, welche die Rechtwinkligkeit nach sich ziehen; Maxima.

A. Desboves, Questions de trigonom., méthodes et solutions (1872), 2. sehr vermehrte Ausgabe (1877); cos nx etc. ohne *Moivre*, *Malfatti*sche Aufgabe etc.

W. Gallenkamp, eben und sphärisch, 2. Aufl. Berlin (1878).

John Casey, Dublin (1888) (8°, 216 S.); Sehr reiches Aufgabenmaterial. Die vollständigste Sammlung für Schulzwecke ist wohl für ebene Trigonometrie *Lieber* und *v. Lühmann*. Berlin (1874) 1. Aufl., (1889) 3. Aufl. Außerdem sehr reiches Material in der Education times z. B. (außer den schon erwähnten *Neuberg*schen) 60, 11 913. 61, 1254. 62, 5240. 70, 11 869. 73, 14 208. 73, 14 290. 73, 6364; in der *Hoffmann*schen Zeitschrift, im *Bourget*, in der Mathesis.

Aus der *Hoffmann*schen Zeitschrift ist das Material gesammelt durch *C. Müsebeck*, und aus den französischen von *Ch. Laisant*.

Monographien.

J. H. Deinhardt, Die Konstruktion trigonometrischer Formeln, Programm Wittenberg (1834); *M. L. G. Wichmann*, Programm Göttingen (1843).

M. Chrescinski, Auflösung einiger trigonometrischer Aufgaben, Programm Lyck (1849); *E. Grebe*, Programm Cassel (1856); Analogien zum Sinussatz.

W. Berkhan, Die Anwendung der Trigonometrie auf Arithmetik und Algebra, Halle (1863). *Sondhaus*, Programm Neiße (1879): Ableitung der Sätze über das ebene Dreieck aus den Sätzen des sphärischen Dreiecks.

A. Schindler, Untersuchung über die Fehler, welche bei der Berechnung ebener Dreiecke entstehen; Programm Prag (1858).

Gianotti, Saggio di calcolo origin. di *Casali* (1856). *E. Grebe*, Programm Cassel (1856), Analogien zum Sinussatz.

Fr. Reidt, Trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktionen (1882).

E. Haentzschel, Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie, Programm 58, Berlin (1900), vgl. auch Programm 58 (1901).

Eigenartig ist:

L. Huebner, Ebene und räumliche Geometrie des Maßes, Leipzig (1888); wohlfeile Auflage (1895).

Franz Meyer, Über volle Systeme in der ebenen Trigonometrie; Jahresber. Deutsche Mathematiker-Vereinigung (1897) p. 561; innerer Zusammenhang der trigonometrischen Formeln.

W. Fuhrmann, Beitrag zur Transformation algebraischer trigonometrischer Funktionen, Programm 19, Königsberg (1898). Formeln für 3 Winkel, die 1. ganz beliebig sind, 2. Dreieckswinkel.

34. Sphärische Trigonometrie.

a. Allgemeines, Geschichte.

Die sphärische Trigonometrie verdankt ihre Entwicklung den Arbeiten von *Gua*, *Euler* (1753 und 1779), *Lexell* (1782), *Legendre* (1782), *Lagrange* [an 7 (1798)], *Cagnoli* (1797 und 1804), *L'Huilier*, *Sorlin*, *Gergonne*,

Szniadecki, Bretschneider, Möbius und von astronomischer Seite *Lacaille, Lagarde, Delambre, Gauß, Mollweide.* Einen gewissen Abschluß bilden die Arbeiten von *E. Study* und *Franz Meyer*, siehe aber auch *Felix Klein*, Über die hypergeometrische Funktion (autogr. Vorlesung) 1894 285—357. Sie ist nicht nur seit *Ptolemäos* die Grundlage der Astronomie, sondern auch die der Geodäsie, seitdem diese durch *Clairaut* und *Gauß* eine Wissenschaft. Es ist klar, daß dem Referenten eine Menge Material in den technischen Werken entgangen ist, wie denn z. B. *Lacaille* seiner Astronomie sogenannte Préliminaires vorausgeschickt hat.

Die Einführung der Zeichen und damit die genaue Bestimmung der Tragweite der Formeln dankt man *Gauß, Gudermann, Bretschneider, Chasles* und vor allen *Möbius* (Analytische Sphärik), vgl. auch *C. Stolz, Schlömilch* 16 und *Angelitti*, Accademia Pontan. (1895), aber auch schon *J. Knar* in seinen Anfangsgründen der reinen Geometrie (1829) unterscheidet zwei entgegengesetzt gerichtete Strecken als positive und negative.

Die Einführung der Polarecke zur Verdoppelung der Formeln wird von *Baltzer*, dessen historische Angaben äußerst zuverlässig sind, *C. F. Schulz* zugeschrieben, der seit *Theodosius* und *Menelaos* die erste deutsche eigne elementare Sphärik (1833) geschrieben hat, aber vgl. Lehrbücher, England. Sie war aber schon den Alten bekannt und wird z. B. von *Lagrange* angewandt in der Arbeit: Journal de l'école polytechnique 6 p. 270—97, der nur die *Gauß*schen Gleichungen zu einem vollendeten Lehrbuch für heute fehlen, desgl. von *L'Huilier* (3. Fall und 6. Fall): *Gergonne* 2 (1810 und 11) p. 257 und nicht minder von *Cagnoli* und *Snellius* und *Nasir Eddin* (*Thusi*).

Das Dualitätsprinzip ist von *Sorlin, Gerg.* 15 (1824—25) p. 273 in seiner ausgezeichneten Arbeit ausgesprochen, deutlicher von *Gergonne* ebendort und am schärfsten von *Gergonne, Gerg.* 16, Considérations philosophiques. Die Formeln werden viel symmetrischer durch Einführung der Außenwinkel. Nennt man die Seiten a, b, c, die Außenwinkel A, B, C, so hat man im Polardreieck A, B, C als Seiten und a, b, c als Außenwinkel, also in den Formeln nur die kleinen und großen Lettern miteinander zu vertauschen. Aber diese Bemerkung ist nicht zuerst von *Ed. Lucas*, Mathesis (1891) p. 189 gemacht, auch nicht von *H. G. Graßmann* (1865) p. 101, in seinem Lehrbuch der Trigonometrie, sondern findet sich schon bei *Cornelius Keogh*, Nouvelles annales 2 p. 304. Das Prinzip, das Nebendreieck zur Ableitung neuer Formeln zu verwerten, ist schon von *Vieta* (oper. omn. 421) benutzt, stammt also nicht von *Keogh* (l. c.). Das komplementäre Dreieck des

rechtwinkligen bei *Cagnoli*, Das Außendreieck als neues Hilfsmittel: *A. Ziegler* (1873), $(2\pi - a)$, b, c.

Sehr einfach leiten *Gergonne*, *Gerg.* 3 p. 348 und *Sorlin* (l. c.) den Sinussatz und seine Folgen aus dem Fundamentalsatz, der eigenartig bei *Euler*, Mémoire de Berlin (1753), und sehr hübsch *Euler*, Acta Petropol. für 1779 p. 73 abgeleitet ist, auch einfach von *Hachette*, Correspond., 1807), Mai p. 273, vgl. auch *R. F. Davis*, *Messenger* 4 (1875) p. 102.

Als wichtiges Hilfsmittel für Sphärik haben *Schulz* und besonders *Gudermann* (s. Sphärik), die sphärische Trigonometrie ausgebildet. Der gewöhnliche Gang ist heute der von *Cagnoli* geschaffene. Das rechtwinklige Dreieck und durch Fällen der Höhe das schiefwinklige. Die Lehre vom Viereck ist im wesentlichen schon von *Lexell* und von *Cagnoli* ausgebildet, die *L'Huilier*sche Formel für $\operatorname{tg} \frac{1}{4} \varepsilon$ nur ein Spezialfall der *Lexell*schen. Die meisten Arbeiten beschäftigen sich mit dem *Legendre*schen Satz, den *Gauß*schen Gleichungen, den Formeln für den Exzeß ε.

b. Zusammenfassende Darstellungen.

(Lehrbücher etc.)

Die meisten Lehrbücher der sphärischen Trigonometrie bei denen der ebenen.

A. M. Legendre, Trigonometrie meist mit den Éléments de Géométrie als Traité de Trigonométrie auf Grundlage des cahier 6 de l'école polytechnique.

A. Cagnoli, 2. umgearbeitete Auflage von 1804; noch heute sehr brauchbar, obwohl er nicht zwischen Kongruenz und Symmetrie scharf unterscheidet.

J. D. Gergonne, *Gerg.* 3 p. 348, aus dem Fundamentalsatz (Kosinus-) der Sinussatz etc. ***Sorlin***, *Gerg.* 15 p. 273, Auszug des Mémoire présenté (1819) 22. Februar von ***Gergonne***. — ***J. Szniadecki***, Polnisch a Jana Sniadeckiego (Wratislawa) 1820, sphärische Trigonometrie, deutsch von *L. Feldt* (1828). *Gauß*: Zusatz zu *Schuhmacher*'s Übersetzung von *Carnot*'s géométrie de pos. Note 7.

F. X. Moth, Die *Lagrange*schen Relationen und ihre Anwendung etc., Prag (1829).

F. Schweißer, *Crelle* 10, breit, aber allgemein (nicht fehlerfrei).

C. A. Bretschneider, *Crelle* 13 p. 85, 145.

J. A. Grunert, Sphärische Trigonometrie (1837).

O. Terquem, Nouv. annal. 5 (1846) auch *Menelaos* und *Ceva* (*Ptolemäos*),

G. Junghann, Studien über das sphärische Dreieck, Programm Luckau (1848).

R. Baltzer, Elemente der Mathematik 2, Leipzig (1858), 3. Aufl. (1870); reich an zuverlässigen historischen Notizen.

Möbius, Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in größtmöglicher Allgemeinheit; Aufhebung der Beschränkung auf Seiten und Winkel unter π Leipz. Ber. 12 p. 51 (1860), Werke 2, p. 73.

J. Todhunter, London mathem. society proceed. 3 (1871) p. 282. 319; historische Noten über gewisse sphärische trigonometrische Formeln; ders: Lehrbuch.

F. J. Studnička, Prager Berichte (1875); Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie mittels Determinantensätzen.

O. Stolz, *Schlöm.* 16 p. 168 (1871); analytische Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in voller Allgemeinheit (Eckensinus).

F. X. Stoll, Die Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie, Programm Bensheim (1879), gut.

S. Günther, Versuch einer schulgemäßen Behandlung der Lehre von den Kreisen des sphärischen Dreiecks.

P. v. Schäwen, Zeitschrift für das Realschulwesen 1882 p. 394—469; ders.: *Schlöm.* 27 (1882) p. 126.

L. Huebener, Ebene und räumliche Geometrie des Maßes, Leipzig (1888).

J. Casey, A treatise on spheric trigonometry, Dublin (1880), äußerst reichhaltig.

E. Study, Sphär. Trigon., orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen, Leipziger Abhandlungen 20 (1893) p. 83—232: Ist

$$\cot\frac{1}{2}a_1 = l_1,\quad \cot\frac{1}{2}\alpha_1 = \lambda_1,$$

so ist:

$$l_1 l_2 = \frac{+1 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2}{-1 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}$$

die algebraisch einfachste Beziehung, vgl. *Felix Klein* Hypergeom. Funktion.

Franz Meyer, *Crelle* 115 p. 209; der Resultantenbegriff in der sphärischen Trigonometrie.

Ragona, Modena Memorie (Tangentenformeln bevorzugt) (2) 5 (1887) p. 53—119; nuove formule etc.

E. Grohmann, Über das sphärische Dreieck, Programm Wien (1897).

F. F. Bohnert, Ebene und sphärische Trigonometrie, Leipzig (1900); gerühmt wird die Trigon. von *Guyau*.

G. Lazzeri, Manuale di trigonom. sferica, Livorno (1900).

Konstruktive Auflösung des sphärischen Dreiecks.

Schon bei *Grua*, *Cagnoli* cap. 19, *Gudermann*, niedere Sphärik (1835), in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, so z. B. bei *Bellavitis*, geometria descrittiva (1851); sehr auschaulich wird die Ableitung der Grundformeln aus dem Dreifach reproduziert von *Chr. Wiener*, Darstellende Geometrie 1 p. 112; *Steinheil*, Münchener Berichte 2 (1869) p. 369 (er findet das Polardreieck!); *W. Fiedler*, *Schlöm.* 8 (63) p. 482, weiter ausgeführt von *J. Hemming*, *Schlöm.* 17 p. 188.

H. Smith, American journ. 1 (1878) und 6 (1883) p. 175.

In die Nicht-*Euklid*ische Geometrie gehört *Fr. Schilling,* Math. Annalen 39 (1891) 598; Geometrische Bedeutung der sphär. Trigon. im Falle komplexer Argumente.

Die Bedeutung des sphärischen Dreiecks für die elliptischen Funktionen, deren Additionstheorem mit dem Kosinussatz übereinstimmt, ist bereits von *Legendre* erkannt; dazu *Glaisher,* Quarterly J. 17 p. 353 (1881); *Johnson,* Quarterly J. 18 p. 365; 19 p. 185, wo die Beschränkung des Moduls $k = \triangle : \delta$ auf Werte < 1 aufgehoben wird.

c) Legendrescher Satz.

Legendre, Mémoire de l'académie des sciences (1787) ohne Beweis, der zuerst: Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien par *J. B. J. Delambre,* précédée d'un mémoire sur le même sujet par *A. M. Legendre*, Paris an. 7 (1798) p. 13 und Trigonométrie, Append. 5 gegeben wird.

Wenn die Seiten des Dreiecks gegen den Radius sehr klein, so kann das Dreieck als eben angesehen werden, und es sind bis auf Größen 4. Ordnung die Winkel $\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}$, wo ε sphärischer Exzeß, und es ist $\varepsilon = \Delta : r^2$. Beweise von *Lagrange*, *Delambre*, *Gauß*, der in den Disquisitiones circa superficies curvas den Satz auf geodätische Dreiecke aller Flächen ausdehnt. Das kleine sphärische Dreieck ist schon vor *Legendre* von den Astronomen, z. B. *Lalande*, *Delambre*, *Cagnoli* durch ein ebenes ersetzt worden.

J. N. P. Hachette, Corresp. (sur l'école polytechn.) (1807) 8. Mai p. 284; Beweis und sehr ähnlicher Satz.

Gauß, Crelle 22 p. 96, sehr kurz und ganz elementar

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[8]{D},$$

wo D Produkt von vier Faktoren $(1 + \varepsilon^4)$, franz. *Liouville* 6 p. 273. — *Gauß,* Bd. 8 p. 451.

A. Winkler, Crelle 44 (1852) p. 273, sehr kurz, aber es fehlt die Begründung, daß $\Delta = \varepsilon$ bis auf Größen 4. Ordnung (die Arbeit ist von 1848).

Grunert, Grun. 23 (1854) p. 111. idem.

A. Tissot, Nouv. annal. (2) 1 (1862) p. 1. Literatur; zwei sehr hübsche Beweise.

E. Catalan, Nouv. annal., Éléments de géom. *R. Baltzer,* durch Entwicklung von $\cos x$ nach Potenzen von x. *Franz Mertens, Schlöm.* 7 p. 248; *Bestimmung der Fehlergrenze.*

Ein Seitenstück zum *Legendre*schen Satz:

Grunert, Grun. 25 (1855) p. 207; das plane Dreieck c, $A - \frac{1}{2}\varepsilon$, $B - \frac{1}{2}\varepsilon$ ersetzt, wenn a, b, c kleine Größen 1. Ordnung das sphärische Dreieck bis auf

Größen von höherer als 4. Ordnung. *P. Serret,* Des méthodes en Géométrie, Paris (1855) Cap. 9. Wenn a, b, c sehr klein gegen R, so kann bis auf Größen 2. Ordnung das plane Dreieck $a, A, B-\varepsilon, C-\varepsilon$, wo ε halber Exzeß, das sphärische Dreieck a, A, B ersetzen. *E. Rouché,* Nouv. annal. 15 (1856) p. 354 zeigt, daß man zwei Elemente belassen und ein drittes um eine beliebige Größe 2. Ordnung ändern kann.

d) Delambre-Gauß-Mollweidesche Gleichungen.

Nepersche Analogien, Cagnolische Formeln.

J. B. Delambre, (1807) Connaissance des temps pour 1808. Beweis im Abrégé d'astronomie. *Gauß,* Theoria motus (1809) p. 51 ohne Beweis, doch soll *Gauß* Satz und Beweis schon früher in seinem Kolleg gegeben haben. *Mollweide,* Monatliche Korrespondenz von *Zach* 18 (1809) p. 394. *v. Szniadecki,* Petersburger Akademie (1811) 29. März zeigte, daß die *Gauß*schen Gleichungen (oder vielmehr ihre Quadrate) nichts anderes sind als die auf den kürzesten Ausdruck gebrachten *Cagnoli*schen Formeln. *Puissant,* Correspond. sur l'école polytechn. 3 (1814) p. 60, einfacher Beweis; vgl. auch seine Géodésie. *Servois, Gerg.* 2 p. 84. *Gergonne, Gerg.* 3 p. 348.

K. H. J. Buzengeiger, Bohnenberger Zeitschrift für Astronomie. 6. *L. Feldt, Crelle* 7 p. 68, kurz. *F. Schmeißer, Crelle* 10 (1833) p. 129; historische Notizen. *Crelle* selbst: *Crelle* 12 p. 348; von *Gerono,* Nouv. annal. 7 p. 232 übersetzt. *Bretschneider, Crelle* 13 p. 85. *J. Dienger, Grun.* 7 p. 225. *F. Arndt, Grun.* 13 (1849). *O. Werner, Grun.* 24 (1855) p. 95.

Konstruktiv:

Ch. Gudermann, Niedere Sphärik p. 144.

Frz. Umferdinger, Grun. 26 (1856) p. 350, aus ebener Figur.

E. Essen, Grun. 27 (1856) p. 38.

W. Crofton, London mathem. society proceed. 3 (1871) p. 13; sehr kurze Ableitung (*Gudermann*).

Nepersche Analogien ohne Division der *Gauß*schen Formeln:

Nach *Wallace* (1791), Cambridge journ. 3 (1842); sie fehlen weder bei *Lagrange* im 6. cah. des Journ. polyt. an. 7 (1798), noch bei *Euler* 1779: Acta Petrop. pro 1782 noch bei *Cagnoli.* — *Cortazar,* Nouv. annal. 6 (1847) p. 218. *O. Werner, Grun.* 24 (1855) p. 95. *Safford,* The mathem. monthly 1 (1859) p. 73.

Die Cagnolischen Formeln finden sich (1804) p. 332 (1139):

$$\sin AB \sin BC + \cos AB \cos BC \cos B$$
$$= \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos AC.$$

Sehr einfach ist ihre Ableitung bei *Bretschneider, Grun.* 13 p. 145 aus dem Kosinussatz und seiner Polarformel, vgl. auch *Szniadecki* (l. c.). Da sie den Astronomen mehr interessieren als den Mathematiker, sind sie in den Lehrbüchern in Vergessenheit geraten und von *Cayley* als

neu wiedergefunden und Philosoph. magazine 11 (1859) p. 151 ähnlich wie von *Bretschneider* und von dem Astronomen *G. B. Airy*, p. 176 geometrisch bewiesen worden; *Barbier*, der sie: Nouv. annal (2) 5 p. 349 erwähnt, vindiziert sie noch *Cayley*.

e) Flächeninhalt.

*L'Huilier*sche Formel:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} p \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - c)$$

von *Legendre* mitgeteilt: Éléments (1800) Note 10, ist aber nur Spezialfall der Formel von *Lexell* für das sphärische Kreisviereck: Acta Petrop (1782) p. 88; *Puissant*, Corresp. *Hachette* 3 p. 60. *Franke, Grun.* 17 p. 309. *Gent*, Programm Liegnitz (1853). *O. Werner, Grun.* 24 (1855) p. 55 wie *Schlömilch* 6 (1861) p. 46; das plane Dreieck sei

$$p = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}; \quad q = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}; \quad r = \cos \frac{1}{2} c,$$

so sind seine Winkel

$$R = 180 - C; \quad P = C - \frac{1}{2} \varepsilon; \quad Q = \frac{1}{2} \varepsilon.$$

A. Prouhet, Nouv. annal. 15 (1856) p. 91. *Lebesgue*, ibid. 16 p. 319. *Baltzer*, 3. Aufl. (1870) p. 326.

L. Huebner, Ebene und räumliche Geometrie des Maßes (1888) p. 258.

Der *L'Huilier*schen entsprechende Formel für das sphärische Viereck von

F. Strehlke, Grun. 35 (1860) p. 104, 447 anknüpfend an *Lexell*, Acta Petrop. (1782).

O. Terquem, Nouv. annal. 5 von *Menelaos* und *Ceva* ausgehend, die Formel von *Gudermann* (*Lagrange*, *Lexell* etc.) $\cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos MN}{\cos \frac{a}{2}}$, wo M und N die Mitten von b und c. Die Formel über die Medianen, worauf die Ableitung beruht, bei *Querret*, Connaissance des temps pour 1822 p. 335. Ist

$$DR = MN \text{ und } DE \perp BCR,$$

so ist

$$DE = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fig. 28.

(Fig. 28.) (Die selbstverständliche Konstruktion bei *Gudermann, Crelle* 6 und 8.) Dieselbe Formel entdeckt *König, Grun.* 34. Die Formel über die Medianen u. a.: Educational times (1899) Mai, mit verschiedenen Lösern.

Vannson, Nouv. annal. 7 (1848) p. 14 im Anschluß an *Terquem*

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sin MN \sin pq.$$

Tédénat, Gerg. 6 p. 46; Inhalt des sphär. Dreiecks mittels Differentialrechnung (*Euler,* Mémoire de Berlin (1753)). *A. Hue*, Nouv. annal. 10 (1851) p. 25 ε durch a, b, c (*Euler, Lagrange, Lexell, Cagnoli*).

Satz von *Kornelius Keogh* V' = Parallelepipedon aus OA', OB', OC', wo A' etc. die Seitenmitten, ist gleich $\sin \frac{\varepsilon}{2}$:

Lebesgue, Nouv. annal. 16 p. 329. *J. A. E. Combescure,* dito, Nouv. annal. 17 p. 142.

Der Zusammenhang des Eckensinus (*v. Staudt*) mit dem Parallelepipedon $OABC$ ist lange vorher z. B. von *Euler* (1779) erkannt.

Der *Lexell*sche Satz: Acta Petrop. für 1781 p. 112, auch von *Legendre* (l. c.) bewiesen, ist von *Steiner, Crelle* 2 p. 45 vervollständigt. Der kleine Ortskreis durch A geht durch die Gegenpunkte von B und C, hübscher Beweis bei *Sorlin* (l. c.); dort auch der polare Satz: Die Basis bei konstantem Parameter und festem Gegenwinkel umhüllt einen Kreis p. 302. *V. A. Lebesgue*, Nouv. annal. 14 p. 24; vgl. hierzu *Gauß*, Bd. 8 p. 292 u. 293, *Schumacher* an *G.* und *Gauß* an *Sch.*, in der Note ist auf die Priorität *Lobatschefskij*'s hingewiesen (1836 russisch).

f) Vermischtes.

Separierte Tangentenformel (s. Trigon.) auf der Kugel bei *Legendre*, Éléments, Note 10 (1800).

Guéneau d'Aumont, Gerg. 12 (1862) p. 264; Recherches sur les quadrilatères.

Das rechtwinklige Dreieck s. bei *Pythagoras.* Vom Sinussatz geht *M. Jenkins* aus: *Messeng.* 17 (1887) p. 30, und beweist $\cos \alpha$ ohne *Gauß*sche Gleichung, dort auch die Formel

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin C} = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c} \left[= \frac{\cos m}{\cos \frac{c}{2}} \right].$$

Die Grundformel (Kosinussatz) als notwendige 3. Gleichung leitet *Raabe, Crelle* 2 durch Koordinatentransformation im Raume ab; *Gudermann, St. Vénant, Liouville* 9 (1844) p. 270 (sehr direkt die Winkel durch die 9 Kosinus der Winkel mit den rechtwinkligen Achsen, Zusatz p. 310). *B. Niewenglowski,* Analytische Geometrie des Raumes; dito *Max Simon* (Sammlung *Schubert*), Fundamentalformel durch Projektion nach *Duhamel* (nach *Lexell*) von *H. Lemonnier,* Nouv. annal. 4 (1846) p. 606.

L'Huilier (l. c.) Fall 3 und 6 (polare); a, c und α zweideutig wie konstruktiv klar, dazu *M. Jenkins, Messeng.* 2 (1873) p. 150; ibid. 14 (1885) p. 153 *Lloyd Tanner,* Note dazu p. 155 von *Jenkins.*

Die Seitendeterminante D von *Staudt, Crelle* 24, Eckensinus genannt, ist schon von *Euler* durch die 3 Winkel, und die Polare δ

durch die 3 Seiten gegeben. Referent hat sie nur bei *Keogh* und *Lebesgue*, Nouv. annal. 12 p. 304 und mit Quellenangabe bei *Baltzer* gefunden, den Modul $D : \delta = \sin a : \sin A$ überall.

Die Formel $\sin a \sin h_a = D$, die u. a. sich schon bei *Lagrange* cah. 6 findet, ist von *Umferdinger* der Wiener Akademie (Bd. 51 der Sitzungsberichte) als neu mitgeteilt. Die Formeln für die Radien analog $\frac{D}{p}$ und $\frac{abc}{4\Delta}$ etc. sind schon vollständig von *Lexell*, *Euler*, *Cagnoli* gegeben, kehren aber immer wieder, z. B. bei *T. Clausen*, *Crelle* 6 p. 84. *S. Löwenstein*, *Crelle* 13 p. 79. *Vannson*, Nouv. annal. 7 p. 14. *Umferdinger*, *Grun.* 29 und 33. Die entsprechende Formel für die Zentrale des In- und Umkreises *Stoll*, *Hoffm.* 15 p. 34:

$$\sin^2 k\mu = \sin^2 R \cos^2 r - \sin 2R \sin 2r$$

(vgl. Taktion). *L'Huilier*, *Gerg.* 2 p. 75; Schwerpunkt.

Die Analogie des sphärischen und ebenen Dreiecks ist häufig abgehandelt, z. B. von *L'Huilier*, zuletzt wohl von *P. v. Schäwen*, Zeitschrift für das Realschulwesen (1882) p. 394, so bei *Lagrange* und *Euler* und sehr vollständig bei *Cagnoli*, der auch die Differentialänderungen bei einem variabeln Stück sehr sorgfältig untersucht hat. Ableitung der ebenen aus der sphärischen Trigonometrie. *S. Günther*, Bayrische Blätter 15 (1879) p. 405: Zur Didaktik der sphärischen Trigonometrie.

Daß die Hauptkreisbogen unter π geodätische Linien sind, der Ausgangspunkt *Euler*'s (1753), ist von *Cagnoli* nicht ganz elementar durch die Reihe für $\cos x$ bewiesen, oft nach dem Vorbild *Euklid*'s durch den Satz $a + b > c$ (ohne dreiseitige Ecke), z. B. vom Referenten; ein elementarer Beweis *D. Besso*, Periodico 1 (1886) p. 122, aber alle diese verlangen schließlich doch einen Grenzübergang (s. auch Sphärik: *Barbet*).

Das sphärische Viereck (besonders im Kreise) ist von *Lexell*, *L'Huilier*, *Cagnoli* eigentlich erledigt, auch *Guéneau d'Aumont*, *Steiner*, *Gudermann* und *Schulz* sind zu nennen; so steht der Potenzsatz (*Baltzer* p. 327) bei *Cagnoli* p. 349; No. 1157, der sphär. *Ptolemäos* 1158.

Zur Fläche des Vierecks:

L. A. Sohncke, *Grun.* 4 p. 347. *H. Hart*, *Messenger* 4 (1875) p. 181; Exzeß eines Vierecks, das einem kleinen Kreise eingeschrieben (*Lexell*, Acta Petrop. (1782)) und Formel für den Radius des kleinen Kreises (*Lexell* l. c.). *C. Kramp*, *Gerg.* (1810/11) p. 161: Jedes sphärische Viereck mit zwei rechten Winkeln läßt sich sofort auf ein schiefes Dreieck zurückführen (wichtig für Astronomen). *C. G. Colson*, *Messenger* 5 (1876) p. 161: Wenn zwei Diagonalen eines vollständigen Vierseits Quadranten sind, so ist es auch die dritte.

Satz von *J. Steiner:*

$\sum \cos a = 4 \cos \frac{e}{2} \cos \frac{f}{2} \cos g$, wo g die sphärische Distanz der Mitten der Diagonalen e und f ist, ist von *Remy, Crelle* 3 p. 84 bewiesen und wiederholt: Nouv. annal. 4 p. 494. *J. L. Raabe, Crelle* 2 p. 9; sphärische Polygonometrie, speziell Vierecke.

C. A. Bretschneider, Crelle 13 (1835) p. 145; interessante Formeln, wo die Viertel der Summen eingeführt sind. *P. Gerwien,* ibid. 11 p. 130, *Gudermann*scher Satz, der (G.): *Crelle* 18 p. 262 den Winkel zweier Kreise aus der Gleichung ihres Systems ableitet.

J. Steiner, Crelle 24 p. 191; Kreissatz auf der Kugel; vgl. *v. Schäwen, Schlöm.* 27 p. 126. *Grunert, Grun.* 47 p. 149; *Pothenot* auf der Kugel. *Bogner, Grun.* 45; einfacher Transversalensatz. *E. Barbier,* Nouv. annal. (2) 5 p. 349, Formeln (1 und 5 neu?).

A. Cayley, Messenger 1 (1872) p. 145; On an identity in spherical trigonometry: $\cos(A + B + C)$. Idem: London mathem. society proceed. 11 (1880) p. 48: A theorem in spher. trigonom.

Frz. Umferdinger, Grun. 50 (1869) p. 107; Winkelhalbierende. *E. Meißel, Grun.* 64 p. 47; 65 p. 429; Klasse von Aufgaben:

$$\alpha \pm a; \quad \beta \pm b \text{ etc.}$$

vgl. Math. Annal. 15 (1879) p. 380 (zum sphärischen Dreieck $a b c \ \alpha \beta \gamma$ gehört ein anderes

$$\alpha_1 = \frac{\pi + a - \alpha}{2} \text{ etc. } \operatorname{tg} \frac{2\alpha_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

und bleibt für das Polardreieck dasselbe).

Gauß, Gesammelte Werke Bd. 3, Nachlaß p. 481—90; Pentagrammum mirificum. Nach mündlicher Mitteilung von *F. Klein* bezieht sich der von *Neper* herrührende Name auf die Konfiguration der untergehenden Sonne, Pol, Zenit etc. Das Pentagr. gehört zu einem gegebenen rechtwinkligen sphärischen Dreieck; die fünf Höhen sind sämtlich Quadranten und daraus folgen sofort die *Neper*schen Analogien. Weitere Ausführungen *Gauß, Band 8* p. 106 und die Bemerkungen dazu von *Fricke* p. 112 (*Jacobi*sches Schließungsproblem der elliptischen Funktionen). *O. F. Dziobek, Grun.* (2) 16 p. 320; Erweiterung des *Gauß*schen Pentagramms auf ein beliebiges Dreieck, daraus merkwürdige Formeln, besonders die letzte, s. aber auch *M. L. G. Wichmann,* Pentagramm. mirif. Preisschrift, Göttingen (1844).

Jeffares, Educ. times 69 (1898) p. 59 Nr. 13593; *Neuberg*, 70 (1899) p. 115 Nr. 13838; *Crofton,* 70 p. 41 Nr. 13661: Wenn von den Bogen, welche die Mitten der Seiten verbinden, einer 90° ist, so sind es auch die anderen, und die Fläche des Dreiecks ist ein Quadrant $\left(\text{unmittelbare Folge von } \cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos MN}{\cos \frac{a}{2}}!\right)$.

L. Bosi, Periodico (1897); je nachdem

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = >< \sin^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} c \text{ ist } A = >< B + C$$

(*J. Neuberg,* Mathesis (1897) p. 61).

Gruppentheoretisch und elliptische Funktionen:

E. Study (l. c.) (Bd. 20 der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften). *Emily Chisholme*, Dissertation, Göttingen (1895); (gruppentheoretisch-)algebraische Untersuchungen über sphär. Trigonom.

Franz Meyer, *Crelle* 115 p. 209. Der Resultantenbegriff in der sphärischen Trigonometrie. (Sinussatz, sehr merkwürdige Zusammenfassung.) (*Katholische* Trigonometrie, s. *Klügel* Art. Trigon.)

O. Pund, Hamburger mathem. Gesellschaft 3 p. 210. Über Substitutionsgruppen in der sphärischen Trigonometrie, insbesondere die *Neper*schen Regeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck.

Vergleiche auch Sphärik, insbesondere für den Inhalt des Dreiecks aus kleinen Kreisen.

Ein mechanisches Instrument zur Auflösung sphärischer Dreiecke mit 1—2 Ablesungen von *Penrose*, London astronomical society 36 (1876) p. 281.

Nachtrag.

Es handelt sich im wesentlichen um *methodische* Äußerungen (vgl. Artikel 13) dreier durch ihre wissenschaftliche Bedeutung ausgezeichneter Mathematiker, *Alfred Pringsheim, Ferd. Lindemann, F. Klein.*

Veranlaßt durch die besonderen Verhältnisse Bayerns hielt *P.* in der öffentlichen Sitzung der Akademie der Wissenschaften zu München am 14. März 1904 eine Rede: *„Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik"*, abgedruckt im Junihefte der „Jahresberichte". Das Thema ist seit *Dasypodius* und *Melanchthon* oder richtiger seit *Platon* immer wieder behandelt und auch *P.* bringt inhaltlich nichts Neues. Aber die vollendete Form und die Lebendigkeit des Vortrags, die Bedeutung des Redners und seiner Hörer rechtfertigten das ungewöhnliche Aufsehen, das die Rede in Laienkreisen erregte.

Der Hauptfeind einer richtigen Wertung der Mathematik ist übrigens nicht der vom Redner (zum Teil mit den Worten des Referenten, vgl. z. B. dessen *Methodik* und das *Referat*, Zeitschr. f. d. Gymnasialwesen 59. 6 (1895) p. 367) bekämpfte *Schopenhauer*, sondern das sind die ihren Besitzstand wahren wollenden sogenannten „klassischen" Philologen, und mit ihnen wird, um *Schopenhauers* Worte zu gebrauchen, der Streit vor bestochenen Richtern geführt. Diese Leute wollen nicht überzeugt sein, und gegen diesen bösen Willen kämpft selbst ein *Pringsheim* vergeblich. Wir müssen uns mit dem „artem non odit, nisi ignarus" begnügen, und im übrigen der Macht der Tatsachen, die stärker ist als die der Menschen, vertrauen.

Ebenfalls einer oder mehreren Gelegenheitsursachen verdanken wir *Lindemanns* Rede *„Lehren und Lernen in der Mathematik"*, dem Antritt des Rektorats der Universität München am 24. Nov. 1904, dem Wunsch, die Wertung der Mathematik in Bayern zu heben, die dort, wie schon aus der ungenügenden Stundenzahl hervorgeht, hinter dem übrigen Deutschland zurückgeblieben ist, und schließlich der Stellungnahme zu den reformatorischen Bestrebungen *Kleins*. Die maßvollen Forderungen *Lindemanns* treffen mit denen des Referenten in seiner Methodik so

ziemlich zusammen; im Straßburger Lyceum steht seit 1871 der Funktionsbegriff im Zentrum des Unterrichts, und wird Differentialrechnung allerdings in sehr bescheidenem Umfang getrieben. Nicht minder wird die geschichtliche Entwickelung und damit der Zusammenhang der Kultur und die Forderung hellenischen oder hellenistischen Geistes für den Unterricht betont. An dieser Stelle lenkt Referent die Aufmerksamkeit auf eine Jugendarbeit unseres zur Zeit bedeutendsten Philosophen, *H. Cohens „Platons Ideenlehre und die Mathematik"* Marburg 1878, Rektoratsprogramm, eine seiner am leichtesten lesbaren Schriften. Bezeichnend für den Tiefstand in Bayern ist übrigens der Protest, den die Lehrer gegen die *Lindemann*sche Rede erhoben.

Sind *Pringsheims* und *Lindemanns* Reden Gelegenheitsschriften, so hat sich *Klein* seit mehr als einem Dezennium mit organisatorischen Fragen des Unterrichts, zu dem ich auch die Enzyklopädie rechne, beschäftigt. Er hat seine ganze freie Zeit auf diese Arbeiten verwandt, ist unablässig für die Ausbildung der Lehrer, selbst in seiner Ferienzeit, bemüht gewesen und hat weit mehr als irgend ein anderer Hochschullehrer, noch dazu von seinem Range, Fühlung mit den Gymnasiallehrern gesucht und gefunden. An hingebender, selbstloser, ich möchte sagen religiöser Liebe für die Mathematik und ihre Rolle im Geistesleben der Menschheit wird er nicht einmal von *Schellbach* übertroffen, an umfassender Beherrschung des ganzen Gebietes der Mathematik und ihrer Anwendungen ist er ein Unikum. Nun sah er die Mathematik in ihrer Wurzel, dem Unterricht auf Hoch- und Mittelschulen bedroht, nicht nur von der Selbstsucht und der Unwissenheit der von *Friedrich August Wolf* ausgehenden, fälschlich *Neuhumanismus* benannten Schule, sondern von den eigenen Kindern, den technischen Wissenschaften und den Naturwissenschaften und zuletzt noch von den vereinigten *Biologen.* Gingen doch die Techniker so weit, alles Ernstes zu fordern, daß ihre mathematischen Kollegen nur solche Aufgaben durchnehmen *dürften*, welche in der Praxis vorkämen, ja noch mehr, die ihnen von den Praktikern gütigst (weil sie selbst sie nicht erledigen konnten) vorgeschrieben würden. *Klein*, der m. E. die Gefahr des Ansturms überschätzte, entschloß sich nach seinen eigenen Worten, die Außenwerke zu opfern, um den inneren Kern um so fester zu behaupten. Referent wird demnächst Gelegenheit finden, auf die *Klein*schen Vorschläge ausführlich einzugehen; er bemerkt hier nur, daß er Maximumsaufgaben und besonders Wahrscheinlichkeitsrechnung zum innersten Kern rechnet. Propädeutik in der Sexta hält Referent und wohl mit ihm alle Lehrer für nutzlos, er verlegt dieselbe nach Quarta, und verweist auf den Brief an *Klein „Über den einleitenden*

geometrischen Unterricht auf Quarta", Jahresbericht 19. Mai 1904. Die im Artikel 3 nicht zitierten *Klein*schen Schriften sind zusammengefaßt in „*Über eine zeitgemäße Umgestaltung des Mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen*" Leipzig 1904. Dazu kommen: „Vorschläge für die Umgestaltung des mathemat.-naturwissenschaftl. Unterrichts an den höheren Schulen, gerichtet an die Schulkommission der Naturforscherversammlung" und sein zurzeit letztes Wort: *Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten.* Gesellsch. deutscher Naturforscher und Ärzte 1905.

Klein deutet hier das notwendige Ziel der Entwicklung: 2 Arten höherer Schulen statt 3: Oberrealschulen und Gymnasien, letztere mit wahlfreiem Nebeneinander von Griechisch und Englisch, recht erkennbar an. Zum Schluß weist Referent auf zwei Antrittsreden hin.

H. Burkhardt in Zürich am 22. Nov. 1897, Jahresbericht 1902, Heft 1 und 2 „Mathem. u. naturwiss. Denken". Das auch die Lehrerwelt interessierende Thema ist dort schlicht, klar, kurz und treffend behandelt.

Greg. Ricci, 5. Nov. 1901, *Padua*, deutsch abgedruckt Jahresbericht 16. Okt. 1902: Anfänge und Entwicklung der neueren Auffassungen der Grundlagen der Geometrie, die im *Artikel* 5 hätte erwähnt werden müssen; inhaltlich geht er nicht über *Engel-Stäckel* hinaus.

Namenregister.

(Die Zahlen bedeuten Abschnitt und Seitenzahlen.)

*) J. F. (S) (4) 29, laut einer gütigen Mitteilung Herrn Neubergs: Pseudonym für Brunhes, den letzten Oberen der Frères des écoles chretiennes vor der Austreibung aus Frankreich.

*) Noca (S.) (4) 52. Der Name ist vermutlich falsch.

*) Pigeon (S.) (22) 164, cah. 16, p. 133 des journal de l'école polytechn.; das Zitat ist unrichtig.

Errata.

A. Namen.

S. 3 usw.		lies:	Moßbrugger
		statt:	Moosbrugger.
„ 5,	Z. 7 u.	lies:	Alexandrow
		statt:	Alexejef.
„ 6,	„ 2	lies:	Menge.
„ 14,	„ 5 u.	„	Chalotais.
„ 16,	„ 10 u.	„	Hauber
		statt:	Haubert.
„ 26,	„ 20	lies:	Taylor.
„ 27 usw.		„	Tédenat
		statt:	Tédénat.
„ 28,	Z. 10	lies:	Lionnet.
„ 29,	„ 6 u.	„	Cesàro.
„ 31,	„ 23	„	Mayer.
„ 38,	„ 4 u.	„	Reiner
		statt:	Rumer.
„ 40,	„ 25	lies:	Spottiswoode.
„ 45,	„ 17 u.	„	Tognoli.
„ 48,	„ 14	„	Peyrard.
„ 49,	„ 16	„	Steenberg.
„ 49,	„ 18	„	Linderup.
„ 50,	„ 12 u.	„	Kunze.
„ 52,	„ 14 u.	„	Perevoschtschikoff.
„ 52,	„ 20 u.	„	
„ 53,	„ 24	„	Peletarius.
„ 53,	„ 24	„	Grienberger.
„ 57,	„ 21 usw.	„	Schumacher.
„ 69		„	Dahse.
„ 70,	„ 10	„	Sommerfeld
		statt:	Sommer.
„ 78 usw.		lies:	Staigmüller.
„ 79,	Z. 20	„	Breton de Champs
		statt:	Berton, was irrtümlich l. c. p. 226 steht.
„ 79,	„ 25	lies:	Erchinger
		statt:	Eninger.
„ 80,	„ 13 u.	lies:	Etremoff und Spaczinski.
„ 82,	„ 4	lies:	Badon
		statt:	Budin.
„ 83,	„ 13 u.	lies:	Baratta.
„ 83,	„ 15 u.	„	Veriot.
„ 85,	„ 5 u.	„	Azémar.
„ 87,	„ 10	„	Répecaud.
„ 95,	„ 28	„	Colin
		statt:	Colines.
S. 96,	Z. 9 u.	lies:	Roberts.
„ 101,	„ 3	„	Jullien.
„ 110,	„ 13 u.	„	Marre.
„ 113,	„ 10 u.	„	Freyer.
„ 114,	„ 9 u.	„	Announx
		statt:	Amour.
„ 115,	„ 6	lies:	Andreini.
„ 117,	„ 10	„	de Paolis
		statt:	de Paoli.
„ 118 überall		lies:	Paolis'
		statt:	Paoli's.
„ 118,	Z. 10 u.	lies:	Saigey.
„ 120,	„ 16	„	Busshop
		statt:	Russkop.
„ 120,	„ 17	lies:	Coatpont.
„ 123,	„ 14 u.	„	Walberer.
„ 124,	„ 10	„	Uhlich.
„ 128,	„ 9	„	Bobillier.
„ 128,	„ 17	„	Malloizel.
„ 129,	„ 18	„	Farjon.
„ 131,	„ 15	„	Rougevin.
„ 132,	„ 18	„	Riecke.
„ 137,	„ 11 u.	„	Haerens.
„ 140,	„ 8	„	Haerens.
„ 140,	Anm.	„	Mackay.
„ 145,	Z. 1 u.	„	Goffart.
„ 149,	„ 9 u.	„	Pelletreau.
„ 149,	„ 10 u.	„	Desboves.
„ 149,	„ 24	„	Nakonecny.
„ 151,	„ 8 u.	„	Marre.
„ 154,	„ 8 u.	„	Gergonne.
„ 158 usw.		„	Manderlier.
„ 168,	Z. 11 u.	„	Fisher.
„ 168,	„ 13 u.	„	Kambly.
„ 172,	„ 4 u.	„	Gmeiner.
„ 173,	„ 15	„	Sarrus.
„ 173,	„ 17	„	Lechevain.
„ 175,	„ 17 u.	„	Sannia
		statt:	Sana.
„ 176,	„ 23	lies:	Verbessem.
„ 177,	„ 16	„	Berthot.
„ 178,	„ 16 u.	„	Kitchin.
„ 179,	„ 13 usw.	„	Hâton.
„ 180,	„ 11	„	Espanet.
„ 186,	„ 6	„	Planck.
„ 189,	„ 1	„	Freson.
„ 196,	„ 4	„	Sinram.

S. 199, Z. 15 lies: Davies.
„ 199, „ 19 „ Rivard.
„ 203, „ 15 u. „ Français.
„ 205, „ 6 u. „ Roberts.
„ 218, „ 18 „ Foucher de Careil.
„ 234, „ 8 usw. „ Unferdinger.
„ 239, „ 20 „ Sondhauß.
S. 240, Z. 2 lies: Lagrange statt: Lagarde.
„ 242, „ 7 u. lies: Gua statt: Grua.
„ 247, „ 9 lies: Loewenstern.
„ 248, „ 11 „ Rogner.

B. Vornamen.

S. 5, Z. 10 lies: A. Quet.
„ 14, „ 10 „ Joh. Chr. Hohlfeld.
„ 19, „ 25 „ K. Ziegel.
„ 19, „ 5 u. „ F. Engel.
„ 35, „ 9 „ E. Glinzer.
„ 36, „ 15 „ A. Emmer.
„ 39, „ 1 u. „ T. St. Aldis.
„ 42, „ 25 „ F. Cajori.
„ 65, „ 10 u. „ A. H. Angl.
„ 82, „ 2 „ L. E. Dicks.
„ 87, „ 4 „ A. S. Herschel.
„ 86, „ 7 „ P. Glotin.
„ 91, „ 14 „ A. Quidde.
„ 93, „ 16 „ C. G. Bellavitis.
S. 111, Z. 12 u. lies: B. Möllm.
„ 118, „ 6 u. „ J. Ch. Dupain.
„ 120, „ 1 „ J. Taylor.
„ 121, „ 17 „ F. Edler.
„ 130, „ 21 „ T. C. Lewis.
„ 142 } „ 143 } „ J. S. Mackay.
„ 168, „ 1 u. „ F. Ferrari.
„ 174, „ 15 „ Léon Collette.
„ 175, „ 15 u. „ R. Bettazzi.
„ 176, „ 17 u. „ F. Geiser.
„ 180, „ 7 u. „ C. F. A. Jacobi.
„ 191, „ 1 „ C. Mosh.
„ 191, „ 7 u. „ E Glinzer.

C. Sonstige Fehler.

S. 8, Z. 28 lies: worden.
„ 8, „ 28 „ eine.
„ 31, „ 5 „ 1772 statt: 1872.
„ 39, „ 11 „ Geometry and Log.
„ 42, „ 25 „ Geschichte statt: Methodik.
„ 45, „ 8 lies: e statt et.
„ 83, „ 16 u. „ Grunert (2) 15.
„ 108, „ 22 „ p. 7 statt: p. 73.
„ 114, „ 21 u. „ Eulerscher Satz.
„ 126, „ 9 „ 440 statt: 770.
„ 181, „ 20 „ von statt: vor.
S. 182, Z. 7 lies: Haupt.
„ 182, „ 23 „ p. 437 statt: p. 457.
„ 194, „ 8 „ 19 p. 154.
„ 203, „ 3 streiche: 2.
„ 205, „ 7 lies: Grun. 9 statt: 7.
„ 223, „ 15 „ Grunert (2) (1897).
„ 229, „ 1 „ Anm.
„ 239, „ 24 streiche: di und setze dafür: ,
„ 245, „ 12 lies: p. 146 statt: 46.
„ 247, „ 1 u. „ der statt: de.

Müller, Professor Dr. **Carl Heinr.**, Oberlehrer am Königl. Kaiser Friedrichs-Gymnasium zu Frankfurt a. M., und Professor **Otto Presler**, Oberlehrer a. d. Städt. Oberrealschule zu Hannover, Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie.

Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen Mit 233 Figuren im Text [VIII u. 320 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 4.—

Ausgabe B. Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Mit 122 Figuren im Text. [VI u. 138 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 2.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 4.80.

—— der Wert der Wissenschaft. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Weber. Mit Anmerkungen von H. Weber in Straßburg i. E. [ca. 240 S.] 8. In Leinw. geb. (Erscheint im April 1906.)

Rausenberger, Dr. **O.**, Professor an der Musterschule in Frankfurt a. M., die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. [VI u. 236 S.] gr. 8. 1887. geh. n. ℳ 5.—

Reichel, Geh. Regierungsrat Dr. **Otto**, Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 2.40.

Schilling, Dr. **Friedrich**, Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht? Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 4.60, in Leinw. geb. n. ℳ 5.—

Schoenflies, Dr. **Arthur**, Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Mit Figuren im Text. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VIII, 2. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Schüssler, Dr. **Rudolf**, Professor an der Technischen Hochschule zu Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 7.—

Stäckel, Dr. **Paul**, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Hannover, und Dr. **Friedrich Engel**, Professor an der Universität Greifswald, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauß. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.—

Staude, Dr. **Otto**, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

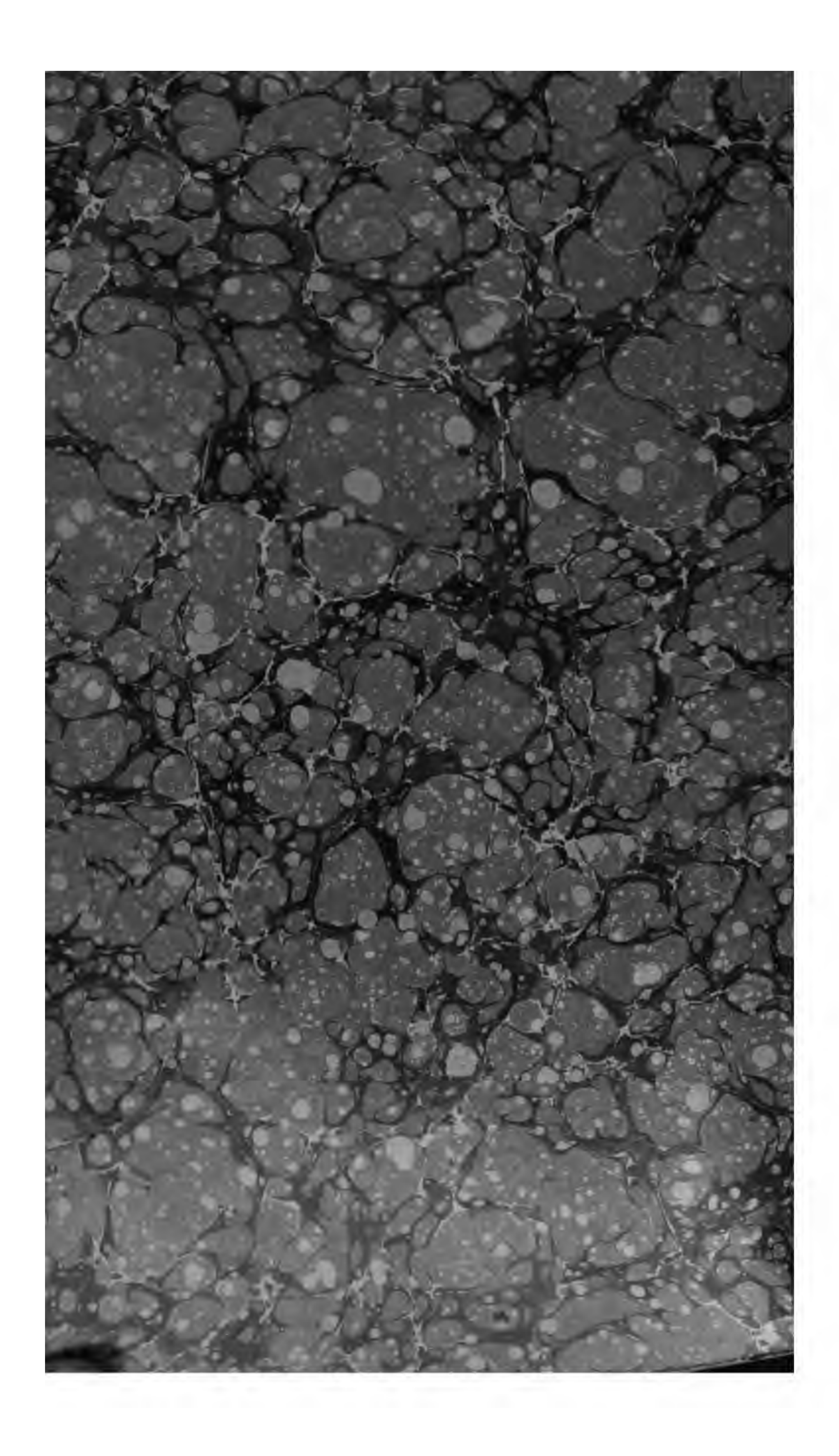
Sturm, Geh. Regierungsrat Dr. **R.**, Professor an der Universität Breslau, Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearb. u. erw. Aufl. Mit 61 Textfig. u. 7 lithogr. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 5.60.

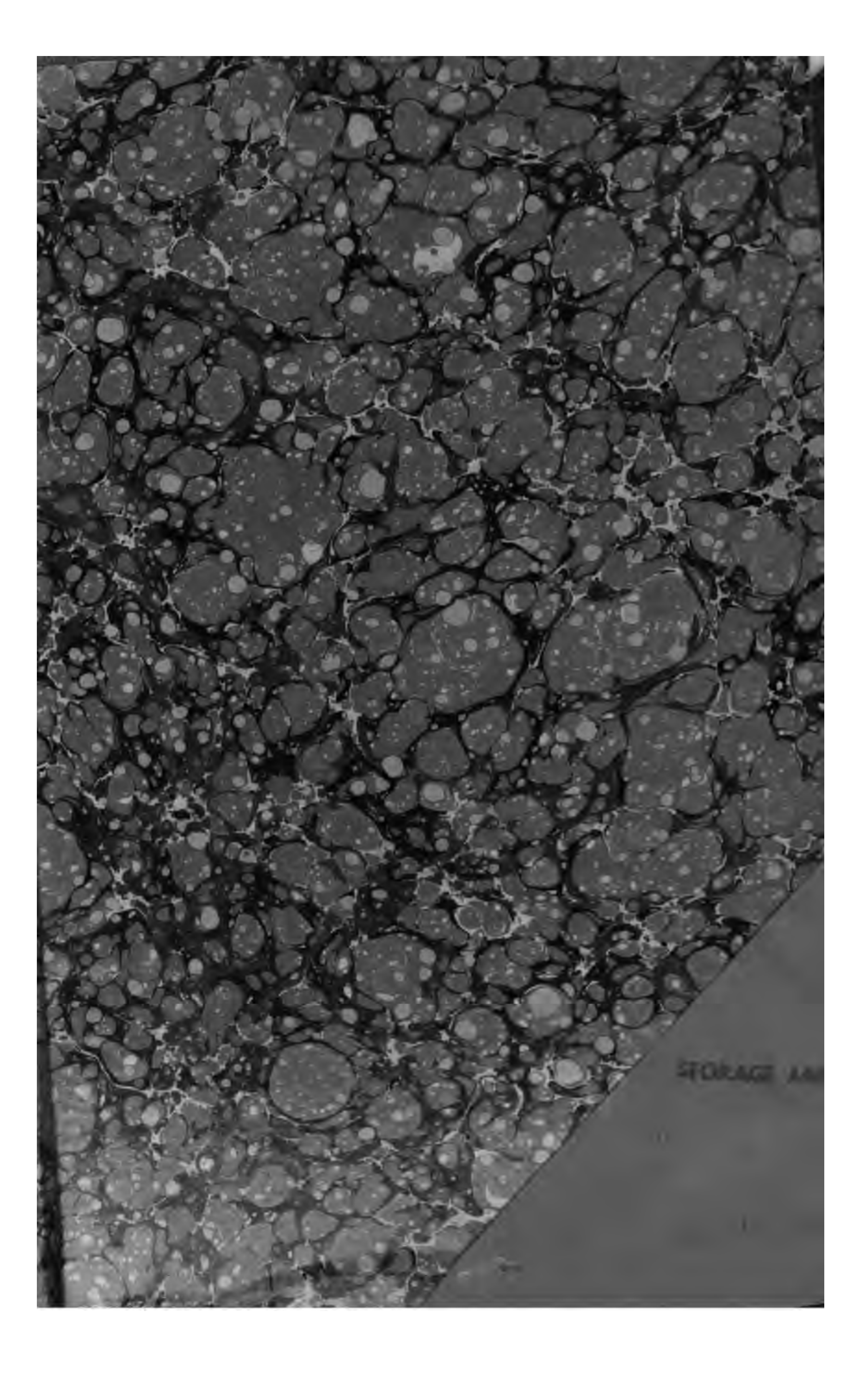
Thomae, Geh. Hofrat Dr. **J.**, Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

Vahlen, Dr. **Karl Theodor**, Professor an der Universität Heidelberg, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—








STORAGE